

EXERCICES 1 — LOGIQUE ET ENSEMBLES

LOGIQUE

EXERCICE 1. — Déterminer les parties de $\mathbb{R}$ dans lesquelles évolue x pour que les propositions ci-dessous soient vraies :

1/ $x > 0$ et $x < 1$ 2/ $x > 0$ ou $x < 1$		3/ $(x > 0 \text{ et } x < 1) \text{ ou } x = 0$ 4/ $x \geq 0 \text{ et } x \leq 2 \text{ et } x \neq 1$
--	--	---

EXERCICE 2. — Traduire avec des quantificateurs le fait qu'une suite $(u_n)_n$ est croissante ; puis le fait qu'elle n'est pas décroissante. Est-ce la même chose ?

EXERCICE 3. — Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes et leurs négations.

- 1/ Il existe un entier supérieur à tous les autres.
- 2/ Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
- 3/ Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
- 4/ Etant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.

EXERCICE 4. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles. Traduire par des phrases les propositions suivantes :

1/ $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$ 2/ $\forall x \in I, f(x) = 0 \implies x = 0$		3/ $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$ 4/ $\forall x, y \in I, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
---	--	---

EXERCICE 5. — Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1/ la fonction f ne prend jamais la valeur 1 ; 2/ f n'est pas une fonction constante ;		3/ f est bornée. 4/ f possède un minimum.
---	--	--

EXERCICE 6. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Exprimer les négations des assertions suivantes à l'aide de quantificateurs :

1/ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ 2/ $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$		3/ $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$ 4/ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
---	--	--

ENSEMBLES

EXERCICE 7. — Compréhension, extension...

- 1/ Ecrire en compréhension et en extension l'ensemble $A = \{1, 3, 5, \dots\}$
- 2/ Ecrire en compréhension et en extension l'ensemble $B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$

EXERCICE 8. — Citer les affirmations vraies ou corriger leur syntaxe :

- a) $\pi \subset \mathbb{R}$ b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ c) $-3 \in \mathbb{Q}$
 d) $\{1, 2\} \cap 3 = \{\emptyset\}$ e) $\mathbb{N}^* \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ f) $3 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

EXERCICE 9. — Soit q un nombre complexe différent de 1. Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

EXERCICE 10. — Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r , avec $r \in \mathbb{C}$. Etablir que pour tout entier naturel

N on a :
$$\sum_{k=0}^N u_k = \frac{u_0 + u_N}{2} (N + 1)$$

EXERCICE 11. — (**Somme des entiers**). Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

EXERCICE 12. — (**Somme des carrés**). Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

EXERCICE 13. — (**Somme des cubes**). Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

EXERCICE 14. — Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$.

EXERCICE 15. — (**Suite de Wallis**). Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$.

Etablir que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES SUR LES ENSEMBLES

EXERCICE 16. — Soient A et B deux parties d'un même ensemble E .

1/ Prouver que : $[A \subset B] \iff [A \cup B = B]$. | 2/ Prouver que : $[A = B] \iff [A \cap B = A \cup B]$.

EXERCICE 17. — Soient A , B et C trois parties d'un même ensemble E . Prouver que :

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

(on pourra raisonner par double inclusion, sans que ce soit une obligation).

EXERCICE 18. — * Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.