

Chapitre 1 : Éléments de logique et de théorie des ensembles

1 – Logique

Définitions : assertion logique (ou proposition mathématique), propositions logiquement équivalentes, table de vérité, proposition contraire $\neg P$ (ou *non* P ou $\bar{P}$), proposition $P \vee Q$, proposition $P \wedge Q$. Les opérations $\vee$ et $\wedge$ sont distributives l'une par rapport à l'autre. Principe du tiers exclus (P est vraie ou fausse), principe de non-contradiction (P ne peut être à la fois vraie et fausse).

Lois de Morgan : $\text{non}(P \vee Q) = \text{non } P \wedge \text{non } Q$ et $\text{non}(P \wedge Q) = \text{non } P \vee \text{non } Q$

Quantificateurs. Règles de négation : $\text{non}(\forall x \in E, A(x)) \equiv (\exists x \in E, \text{non } A(x))$ et $\text{non}(\exists x \in E, A(x)) \equiv (\forall x \in E, \text{non } A(x))$

2 – Ensembles

Définitions d'ensemble, d'inclusion et d'égalité entre deux ensembles. Règle de double inclusion : $A = B$ SSI $A \subset B$ et $B \subset A$. L'ensemble des parties d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$ (rq : l'ensemble vide $\emptyset$ et E appartiennent toujours à $\mathcal{P}(E)$).

Opérations sur les ensembles : soient E un ensemble, A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$: définition de $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $\bar{A} = E \setminus A$.

Propriétés : $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ("lois de Morgan pour les ensembles").

Définition du produit cartésien $E \times F$; notation $E^n = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$.

Exemples : à un point du plan (*resp.* de l'espace) réel muni d'un repère orthonormé direct on peut associer un unique couple (*resp.* triplet) de coordonnées (cartésiennes), c'est-à-dire un élément de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (*resp.* de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

3 – Exemples de démonstrations mathématiques

Démonstration d'une implication ; d'une équivalence (par double implication) ; par récurrence (faible) ; par l'absurde (ex : $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$) ; par analyse-synthèse ("théorème de décomposition").

Chapitre 2 : Méthodes algébriques

1 – Brefs rappels sur les suites

Définition. Cas particuliers des suites arithmétiques et géométriques.

2 – Sommes

Somme : notation $\sum_{i \in I} a_i$ pour (a_n) une suite et I un ensemble d'indices. En pratique on a souvent : $I = \llbracket 0; n \rrbracket$ et on note alors $\sum_{i=0}^n a_i$ la somme " $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ ".

Propriétés des sommes : soient (a_n) et (b_n) deux suites, λ un réel.

► Linéarité : $\sum_{k=n}^p (a_k + b_k) = \sum_{k=n}^p a_k + \sum_{k=n}^p b_k$ et $\sum_{k=n}^p (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=n}^p a_k$

► "Relation de Chasles" : $\sum_{k=n}^p a_k = \sum_{k=n}^m a_k + \sum_{k=m+1}^p a_k$

► Sommes télescopiques : $\sum_{k=n}^p (a_{k+1} - a_k) = a_{p+1} - a_n$

QUELQUES SOMMES REMARQUABLES

► Somme des termes d'une suite arithmétique. Pour (u_n) une suite arithmétique : $\sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$

► Somme des termes d'une suite géométrique. Pour (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$: $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ et $\sum_{k=p}^n u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$

► Somme des premiers entiers. $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

► Somme des premiers carrés. $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

► Somme des premiers cubes. $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2$

Sommes doubles : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right)$ (en exo)

3 – Produits

Produit : notation $\prod_{i \in I} a_i$ pour (a_n) une suite et I un ensemble d'indices. En pratique on a souvent : $I = \llbracket 0; n \rrbracket$ et on note alors $\prod_{i=0}^n a_i$ le produit " $a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$ ".

Propriétés des produits : soient (a_n) et (b_n) deux suites, λ un réel.

$$\triangleright \prod_{k=p}^n (a_k \times b_k) = \prod_{k=p}^n a_k \times \prod_{k=p}^n b_k \text{ et } \prod_{k=1}^n (\lambda a_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^n a_k$$

$$\triangleright \text{“Relation de Chasles”} : \prod_{k=n}^p a_k = \prod_{k=n}^m a_k \times \prod_{k=m+1}^p a_k$$

$$\triangleright \text{Produits télescopiques} : \prod_{k=n}^p \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{p+1}}{a_n}$$

Définition de n factorielle : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = \prod_{k=1}^n k$ et $0! = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n! = (n-1)! \times n$.

4 – Coefficients binomiaux

$\triangleright$ Définition : on note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaison de p éléments parmi n .

$\triangleright$ **Théorème** : n, p dans $\mathbb{N}$. On a : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ si $0 \leq p \leq n$, 0 sinon.

QUESTIONS DE COURS :

$$\triangleright \text{Somme des carrés} : \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\triangleright \text{Somme des cubes} : \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2$$

$\triangleright$ **Somme des termes d’une suite géométrique** : soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$. On a :

$\triangleright$ Propriétés des coefficients binomiaux :

$$\triangleright \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq p \leq n, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \text{ (“symétrie”)}$$

$$\triangleright \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, p \leq n, \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p} \text{ (“relation de Pascal”)}$$

$$\triangleright \text{Valeurs remarquables} : \binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}; \binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1};$$

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} = \sum_{k=1}^{n-1} k.$$

$\triangleright$ Formule du binôme de Newton :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Applications : construction du triangle de Pascal, identités remarquables, linéarisation, et formules diverses (exemple : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$).

OBJECTIFS DE LA SEMAINE :

- $\triangleright$ **Connaître son cours**, ce qui signifie connaître les définitions, les énoncés des théorèmes, et notamment les sommes remarquables; avoir compris les exercices vus en cours/TD.
- $\triangleright$ Pour cette semaine, et pour la suite de l’année : avoir compris le principe des

$\neq$ **méthodes de démonstration** (compétence qui sera archi-développée en cours d’année, où - presque... - tous les résultats seront prouvés).

- $\triangleright$ En particulier, être au point sur la **méthode du raisonnement par récurrence**.