Colle 1 — Questions de cours

Question de cours 1 — **Propriété (somme des carrés)**. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \; \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$

Preuve. Notons $P(n)$ l'assertion : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

➤ Initialisation $(n=0)$. D'une part : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$. D'autre part : $\dfrac{0\,(0+1)\,(2\times 0+1)}{6} = 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

➤ Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\,[n\,(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)}{6} \quad (\spadesuit)$$

Par ailleurs : $\dfrac{(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)}{6} = \dfrac{(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)}{6}$ $(\clubsuit)$

On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)}{6}$. Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \; \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

Question de cours 2 — **Propriété (somme des cubes)**. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \; \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$

Preuve. Démontrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

➤ Notons $P\,(n)$ la propriété : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$.

➤ **Initialisation** : pour $n = 0$, on a d'une part $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0$, et d'autre part $\dfrac{0^2\,(0+1)^2}{4} = 0$ *. On en déduit que $P(0)$ est vraie.

➤ **Hérédité** : supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n (hypothèse de récurrence). Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2 + 4\,(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2\left(n^2+4n+4\right)}{4}$$

Soit finalement : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4}$, cette égalité signifiant que $P\,(n+1)$ est vraie, ce qui établit l'hérédité.

➤ **Conclusion** : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \; \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$

---

*. Waow !

QUESTION DE COURS 3 — Exercice classique. — $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

PREUVE. ➤ Soit n un entier naturel $\geqslant 2$.

On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f en posant : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1+x)^n \ \ (\spadesuit)}$.

D'après la formule du binôme de Newton[†], on a également : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \ \ (\heartsuit)}$.

En calculant $f(1)$ à l'aide des formules $(\spadesuit)$ et $(\heartsuit)$, on obtient : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$

➤ La fonction f est dérivable[‡] sur $\mathbb{R}$, et on obtient deux expressions pour sa dérivée en utilisant les formules $(\spadesuit)$ et $(\heartsuit)$.

D'une part : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = n\,(1+x)^{n-1} \ \ (\diamondsuit)}$ Et d'autre part : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} \ \ (\clubsuit)}$

En calculant $f'(1)$ à l'aide des formules $(\diamondsuit)$ et $(\clubsuit)$, on obtient : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}}$

QUESTION DE COURS 4 — Propriété (somme des termes d'une suite géométrique). Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$, avec $q \neq 1$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

PREUVE. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$, avec $q \neq 1$. Démontrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

➤ Notons $P(n)$ la propriété : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

➤ **Initialisation** : pour $n = 0$, on a d'une part $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0$, et d'autre part $u_0 \times \dfrac{1-q}{1-q} = u_0$. D'où $P(0)$ est vraie.

➤ **Hérédité** : supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n (hypothèse de récurrence). Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + u_{n+1} = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + u_0 \times q^{n+1} = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = u_0 \times \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

Soit finalement : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$, cette égalité signifiant que $P(n+1)$ est vraie, ce qui établit l'hérédité.

➤ $\boxed{\textbf{Conclusion} : \text{si } q \neq 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

---

†. $\forall\, (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

‡. Car f est polynomiale.