Colle 2 – Questions de cours

Question de cours n°1 — Formule du binôme de Newton : $\forall\,(a,b)\in\mathbb{C}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$

Soient a et b deux nombres complexes. Notons, pour tout n entier naturel, $\mathrm{P}(n)$: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$.

➤**Initialisation** : pour $n=0$, on a $(a+b)^0=1$ et $\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^kb^{0-k}=\binom{0}{0}a^0b^0=1$, ce qui assure que $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

➤**Hérédité** : on suppose $\mathrm{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. Alors :

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n=(a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}$$

$$=\sum_{K=1}^{n+1}\binom{n}{K-1}a^Kb^{n+1-K}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}$$

La relation obtenue $(a+b)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}$ signifie exactement que la propriété $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie, ce qui établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion : $\forall\,(a,b)\in\mathbb{C}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$.

Question de cours n°2 — Exercice. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)=0$

Pour tout réel x, on a : $\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)=[\cos(x)+\cos(3x)]+\cos(2x)=2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)+\cos(2x)$

$$=2\cos(2x)\cos(x)+\cos(2x)=\cos(2x)\,[2\cos(x)+1]$$

Ainsi, un réel x est solution de (E) SSI : $\cos(2x)=0$ ou $\cos(x)=-1/2$, c'est à dire SSI : $2x\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ou $x\equiv\pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

On en déduit que x est solution de (E) SSI $x\equiv\frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$ ou $x\equiv\pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

Conclusion. L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

QUESTION DE COURS N^{0}3 — **Propriétés des congruences.** Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

1/ **Réflexivité** : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \equiv x\,[A]$

2/ **Symétrie** : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (y \equiv x\,[A]) \Longleftrightarrow (x \equiv y\,[A])$

3/ **Transitivité** : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (y \equiv x\,[A] \wedge z \equiv x\,[A]) \Longrightarrow (z \equiv x\,[A])$

1/ Pour tout réel x, on a : $x = x + 0 \times A$, d'où : $x \equiv x\,[A]$.

2/ Soient x et y deux réels tels que : $y \equiv x\,[A]$. Alors : $\exists k \in \mathbb{Z},\ y = x + kA$. D'où : $x = y + (-k)A$, soit encore : $x = y + k'A$ avec $k' = -k \in \mathbb{Z}$. D'où : $x \equiv y\,[A]$.
On a ainsi établi l'implication : $(y \equiv x\,[A]) \Longrightarrow (x \equiv y\,[A])$. L'implication réciproque (et donc l'équivalence) provient de ce que les réels x et y jouent des rôles symétriques dans cet énoncé.

3/ Soient x, y et z trois réels tels que : $y \equiv x\,[A]$ et $z \equiv y\,[A]$. Alors : $\exists k \in \mathbb{Z},\ y = x + kA$ et $\exists k' \in \mathbb{Z},\ z = y + k'A$.
D'où : $z = x + (k + k')\,A$. Puisque $(k + k') \in \mathbb{Z}$, cette égalité signifie que : $z \equiv x\,[A]$.
Par suite : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (y \equiv x\,[A] \wedge z \equiv x\,[A]) \Longrightarrow (z \equiv x\,[A])$.

Remarque : *les trois énoncés de la propriété ci-dessus signifient que la relation "être congru à" (ou relation de congruence) est ce que l'on appelle une* ***relation d'équivalence****. Nous aurons de nombreuses occasions de revoir cette notion en cours d'année.*

QUESTION DE COURS N^{0}4 — **Maths / Physique**. Pour tout couple de réels (a,b), il existe un couple de réels (K,φ) tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) = K\cos(x - \varphi)$

Soient a et b deux nombres réels. On distingue deux cas.

➤ **Premier cas :** $(a,b) = (0,0)$. Dans ce cas : $\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) = 0$. Le couple $(0,\varphi)$ (φ étant un réel quelconque) convient.

➤ **Second cas :** $(a,b) \neq (0,0)$. Dans ce cas : $\sqrt{a^2+b^2} > 0$. On peut donc écrire pour tout réel x :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{K}\left(\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{A}\cos(x) + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{B}\sin(x)\right)$$

Il résulte de la définition des réels A et B que : $A^2 + B^2 = 1$.

Par conséquent : $\exists \varphi \in \mathbb{R},\ A = \cos(\varphi) \wedge B = \sin(\varphi)$.

D'où pour tout réel x :

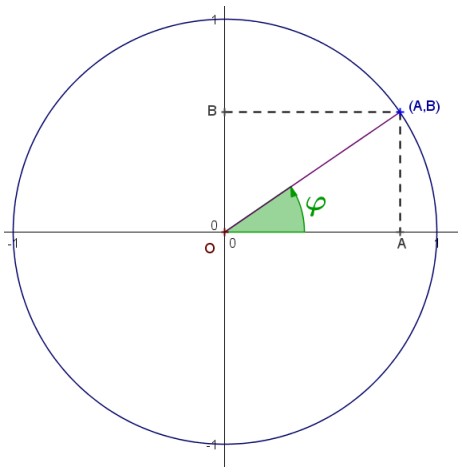
$$a\cos(x) + b\sin(x) = K\left[\cos(\varphi)\cos(x) + \sin(\varphi)\sin(x)\right] = K\cos(x - \varphi)$$

On a ainsi établi que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \exists (K,\varphi),\ \forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) = K\cos(x - \varphi)$$

Remarque : *la condition $A^2 + B^2 = 1$ signifie que le point M de coordonnées (A,B) est tel que $OM = 1$.*

Autrement dit, la condition $A^2 + B^2 = 1$ signifie que (A,B) est le couple des coordonnées d'un point situé sur le cercle trigonométrique.

A ce titre, il existe un réel φ tel que $A = \cos(\varphi)$ et $B = \sin(\varphi)$.

Observation : un tel réel φ n'est pas unique, car n'est défini qu'à un multiple de 2π près.