

PROBLÈME DE LA SEMAINE 2

EXERCICE 1 — (Délinéarisation) Soient n un entier naturel, et θ un réel. Etablir que :

$$\sin^{2n+1}(\theta) = \left(\frac{-1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} \sin((2n-2k+1)\theta)$$

EXERCICE 2 — (Délinéarisation) Soient n un entier naturel, et θ un réel. Etablir que :

$$\cos(2n\theta) = \sum_{p=0}^n \left[\binom{2n}{2p} (-1)^p \cos^{2(n-p)}(\theta) \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} (-1)^j \cos^{2j}(\theta) \right]$$

EXERCICE 3 — (Tangente) On rappelle que la fonction tangente (notée $\tan$) est définie en posant :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ pour tout réel } x \neq \frac{\pi}{2} [\pi].$$

1/ Etablir que pour tout réel y , il existe un unique réel x tel que :

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad y = \tan(x)$$

2/ Soient $x_1, \dots, x_7$ sept nombres réels arbitraires.

Etablir qu'il existe deux entiers i et j dans $\llbracket 1, 7 \rrbracket$ tels que :

$$i \neq j \text{ et } 0 \leq \frac{x_j - x_i}{1 + x_i x_j} \frac{\sqrt{3}}{3}$$