

EXERCICES 5 : GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

GÉNÉRALITÉS

EXERCICE 1. — Résoudre l'équation : $\ln^2(x) - \ln(x) - 30 = 0$.

EXERCICE 2. — Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

EXERCICE 3. — Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, x(1-x) \leq \frac{1}{4}$

EXERCICE 4. — Résoudre les inéquations suivantes, et représenter les ensembles des solutions sur la droite réelle.

$$a/ |x-1| \leq 2 \quad b/ |x+2| > 1 \quad c/ |x-3| = 2 \quad d/ |x-1| < \alpha \text{ (avec } \alpha > 0)$$

EXERCICE 5. — Résoudre les inéquations

$$a/ |2x-1| \leq 1 \quad b/ |3x+2| \geq 4 \quad c/ |2x-1| \geq |x+2|$$

DÉRIVABILITÉ, APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

EXERCICE 6. — Dans chacun des exemples suivants, calculer la dérivée de f (lorsque cette dérivée existe).

1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(\varphi - x)$ (avec $\varphi \in \mathbb{R}$) 2) $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = e^{1/x}$ 3) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ch}(x^3 - 2x)$ 4) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{ax+b} \cos(x)$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) 5) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin^5(x)$	6) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ 7) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos^n(x)$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) 8) $\forall x > 0, f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)$
---	--

EXERCICE 7. — Prouver que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $\sin(x) \geq x$.

EXERCICE 8. — Montrer que pour tout réel x positif on a : $\operatorname{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$. Est-ce vrai pour tout réel x ?

EXERCICE 9. — Prouver que pour tout réel $x \in]0; \pi/2[$, on a : $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$

EXERCICE 10. —

1/ Démontrer que pour tout réel $u > -1$, on a : $\ln(1+u) \leq u$.

2/ A l'aide de la question précédente, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

EXERCICE 11. — (**Dérivation et parité**) — Soit f une fonction dérivable sur une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à zéro. Que peut-on dire de f' si f est paire ? Si f est impaire ?

EXERCICE 12. — Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$ est-elle définie ? Dérivable ? Donner l'expression de sa dérivée.

EXERCICE 13. — Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq 3|x - y|^2$. Prouver que f est constante.

FONCTIONS HYPERBOLIQUES

EXERCICE 14. — Montrer que pour tout réel x on a : $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$

EXERCICE 15. — Montrer que pour tout couple de réels (a, b) on a : $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a) \operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a) \operatorname{sh}(b)$

EXERCICE 16. — Montrer que $\operatorname{ch}(\ln(2))$ est un nombre rationnel, que l'on explicitera.

EXERCICE 17. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{ch}(x) - 6 = 0$

EXERCICE 18. — Etablir que, pour tout entier naturel n non-nul et pour tout réel non nul x , on a :

$$\sum_{k=0}^n e^{kx} = e^{nx/2} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

EXERCICE 19. — Etablir que pour tout entier naturel n , et pour tout réel x , on a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{kx} = 2^n e^{nx/2} \operatorname{ch}^n\left(\frac{x}{2}\right)$$

EXERCICE 20. — Soit x un réel quelconque. Linéariser $\operatorname{ch}^4(x)$, puis linéariser $\operatorname{sh}^3(x)$.

EXERCICE 21. — Exprimer $\operatorname{ch}(3x)$ en fonction de $\operatorname{ch}(x)$ pour tout réel x .

EXERCICE 22. — (**Argch**) — Soit y un réel strictement supérieur à 1. Etablir que l'équation $\operatorname{ch}(x) = y$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

UTILISATION DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

EXERCICE 23. — Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x} \quad \text{b/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x} \quad \text{c/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{3x} \quad \text{d/ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$$

EXERCICE 24. — Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a/ } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \tan\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{b/ } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{c/ } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{d/ } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \left(e^{1/n} - 1\right)$$

EXERCICE 25. — Etablir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

DÉRIVÉES D'ORDRES SUPÉRIEURS

EXERCICE 26. — Calculer la dérivée n -ième de f dans chacun des cas suivants :

$$\left. \begin{array}{l} 1/ \ f(x) = (2x-1)e^{ax+b} \\ 2/ \ f(x) = 4x \sin(x) \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} 3/ \ f(x) = \sin(x) \cos(x) \\ 4/ \ f(x) = (x^2+1)e^x \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} 5/ \ f(x) = \cos^3(x) \\ 6/ \ f(x) = x \operatorname{ch}(x) \end{array} \right|$$

EXERCICE 27. — Calculer la dérivée n -ième de chacune des fonctions f , g et h respectivement définies par :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad g(x) = \frac{1}{1+x} \quad h(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

EXERCICE 28. — Soient a et b deux réels. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = \operatorname{ch}(ax+b)$$

Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \ g^{(2n)}(x) = a^{2n}g(x)$.

EXERCICE 29. — 1/ Calculer de deux façons la dérivée n -ième de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^{2n}$.

2/ En déduire la valeur de : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

ETUDES DE FONCTIONS, LIMITES, (IN)ÉQUATIONS, FONCTIONS PUISSANCES...

EXERCICE 30. — Etudier la fonction $f : x \mapsto x^{1/x}$ (ensemble de définition, dérivabilité, dérivée, tableau de variations, limites aux bornes).

EXERCICE 31. — Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-2x} (\ln x)^5$.

EXERCICE 32. — Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2022^x}{x^{2022}}$.

EXERCICE 33. — Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x$.

EXERCICE 34. — Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x}\right)^x}$.

EXERCICE 35. — Résoudre l'équation suivante (d'inconnue réelle x) : $3^{2x} - 5 \times 3^x + 6 = 0$.

EXERCICE 36. — Résoudre l'équation suivante (d'inconnue réelle x) : $4^x - 2^{x+1} = 8$.

EXERCICE 37. — Déterminer les valeurs du réel x telles que : $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$

EXERCICE 38. — Montrer que pour tout x dans $]0; 1[$: $x^x (1-x)^{(1-x)} \geq \frac{1}{2}$

EXERCICE 39. — Soit a un réel strictement positif. Résoudre l'inéquation : $a^{(x^2)} < (\sqrt{a})^{7x-3}$

EXERCICE 40. — Déterminer : $\max_{n \in \mathbb{N}^*} \sqrt[n]{n}$

EXTRAITS DE DS

EXERCICE 41. — **(INÉQUATION).** Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation : $x^{3x^2+3x} \leq \sqrt{x}^{2x+2}$.

EXERCICE 42. — **(LIMITE).** Soit α un nombre réel. On pose, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n = 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

Déterminer en fonction de α la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n$.

EXERCICE 43. — (AUTOUR DE LA FONCTION SH).

On rappelle que la fonction sinus hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1/ Questions préliminaires.

- a/ Rappeler brièvement la dérivée, le sens de variation, la parité, les limites en $\pm\infty$ et le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction sh (*aucune justification n'est nécessaire*).
- b/ Déterminer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right)$.
- c/ Montrer que pour tout réel y , on a : $y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$ et $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$.
- d/ Soit y un réel arbitraire. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_y) : \operatorname{sh}(x) = y$ (*on établira l'existence et l'unicité d'une solution*).

2/ Introduction et étude d'une nouvelle fonction.

On définit une fonction F en posant : $F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

- a/ Justifier que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$. Puis établir que F est impaire.
- b/ On admet que F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- c/ Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction F .
- d/ Déterminer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{\sqrt{x}}$.

EXERCICE 44. — (DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET LIMITES).

1/ Rappeler le développement limité à l'ordre 1 en 0 de $\ln(1+x)$.

2/ Dédire de la question précédente les limites :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{et} \quad \ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

3/ Le but de cette question est de calculer : $\ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

a/ Etablir que pour tout réel x positif ou nul, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

b/ En déduire qu'il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

c/ Dédire de ce qui précède que la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n \right]$ est finie (càd est égale à un réel). Préciser sa valeur.

d/ Dédire de ce qui précède la valeur de ℓ_3 .