# DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

**DÉFINITION**. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert non-vide et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $a$ un élément de $I$ et $n$ un entier naturel. La fonction $f$ admet un **développement limité à l'ordre** $n$ **en** $a$ s'il existe :

➢ $(n+1)$ scalaires $a_0, a_1 \ldots, a_n$,

tels que : $\forall\, x \in\ I,\ \ f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k\right] + o_a\left((x-a)^n\right)$

Le point-clef pour la construction des DL est la formule de Taylor-Young, qui fait le lien entre le développement limité d'une fonction en un point $a$ et ses dérivées successives en $a$.

**Théorème** (FORMULE DE TAYLOR-YOUNG) : si $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in\ I$, alors $f$ admet un DL à l'ordre $n$ en $a$, explicitement :

$$\forall\, x \in\ I, \quad f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] + o_a\left((x-a)^n\right)$$

## Formulaire des développements limités et équivalents usuels

### "LES FONDAMENTAUX"

✏ $$\boxed{\mathrm{e}^x = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right] + o(x^n)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

✏ $$\boxed{\mathrm{ch}(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right] + o\left(x^{2n+1}\right)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

✏ $$\boxed{\mathrm{sh}\ (x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] + o\left(x^{2n+2}\right)} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

✏ $$\boxed{\cos(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right] + o\left(x^{2n+1}\right)} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

✏ $$\boxed{\sin(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] + o\left(x^{2n+2}\right)} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

✏ $$\boxed{\frac{1}{1-x} = \left[\sum_{k=0}^{n} x^k\right] + o(x^n)} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

✏ $$\boxed{\ln(1+x) = \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}\right] + o(x^n)} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

✏ $$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i)}{k!} x^k\right] + o(x^n)} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

## Conséquences des "Fondamentaux"

✏ $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + \dfrac{62x^9}{2835} + o\left(x^{10}\right)$ *(par quotient à partir des DL de sin et de cos)*

✏ $\operatorname{th}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{17x^7}{315} + \dfrac{62x^9}{2835} + o\left(x^{10}\right)$ *(par quotient à partir des DL de sh et de ch)*

✏ $\arctan(x) = \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right] + o\left(x^{2n+2}\right) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$

*("primitivation" du DL de $1/(1+x^2)$)*

✏ $\arcsin(x) = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + \dfrac{5x^7}{112} + \dfrac{35x^9}{1152} + o\left(x^{10}\right)$ *(DL de $\left(1-x^2\right)^{-1/2}$, puis "primitivation")*

✏ $\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3x^5}{40} - \dfrac{5x^7}{112} - \dfrac{35x^9}{1152} + o\left(x^{10}\right)$ *(utilisation de l'identité : $\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin(x)$)*

## Exemples de cas particuliers fréquents

✏ $\mathrm{e}^{-x} = \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right] + o\left(x^n\right) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$

*(changement de variable $x \longmapsto -x$ dans le DL de $\mathrm{e}^x$)*

✏ $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o\left(x^3\right)$ *(cas particulier du DL de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = 1/2$)*

## Exemples de développements asymptotiques ("DL au voisinage de $+\infty$")*

✏ $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,x^k}\right] + o\left(\dfrac{1}{x^n}\right) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{6x^3} + \cdots + \dfrac{1}{n!\,x^n} + o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$

✏ $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!\,x^{2k+1}}\right] + o\left(\dfrac{1}{x^{2n+2}}\right) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{6x^3} + \dfrac{1}{120x^5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)!\,x^{2n+1}} + o\left(\dfrac{1}{x^{2n+2}}\right)$

✏ $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{kx^k}\right] + o\left(\dfrac{1}{x^n}\right) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{3x^3} - \cdots + (-1)^{n+1} \dfrac{1}{nx^n} + o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$

✏ $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^\alpha = 1 + \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i)}{k!x^k}\right] + o\left(\dfrac{1}{x^n}\right) = 1 + \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2x^2} + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6x^3} + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!\,x^n} + o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$

## Quelques équivalents usuels†

$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

$\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

$\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

$\tan\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

$\operatorname{th}\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

$\arctan\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

$\arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

$\arccos\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

$\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$

$\operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n}$

$\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$

---

*. Formules obtenues à l'aide du changement de variable $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

†. Extrêmement utiles dans les problèmes faisant intervenir les suites et les séries. C'est ce qui justifie l'écriture de ces équivalents avec $1/n$ ($n$ tendant vers $+\infty$) plutôt qu'avec un $x$ tendant vers 0.