Chapitre 5 – Fonctions usuelles

VI-1/ Fonction logarithme néperien et fonction exponentielle

La fonction logarithme népérien

➤ **Dérivabilité** : la fonction $x \longmapsto \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln' x = \frac{1}{x}$$

➤ **Sens de variation** : strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
➤ **Limites aux bornes** :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} \ln x = -\infty$$

(asymptote verticale d'équation $x = 0$).

➤ **Tableau de variation** :

x	0		$+\infty$
$\ln x$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

➤ La fonction ln est une **bijection** de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$
➤ $\forall\, (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$

La fonction exponentielle

➤ **Dérivabilité** : la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}'(x) = \mathrm{e}^x$$

➤ **Sens de variation** : strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
➤ **Limites aux bornes** :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

(asymptote horizontale d'équation $y = 0$).

➤ **Tableau de variation** :

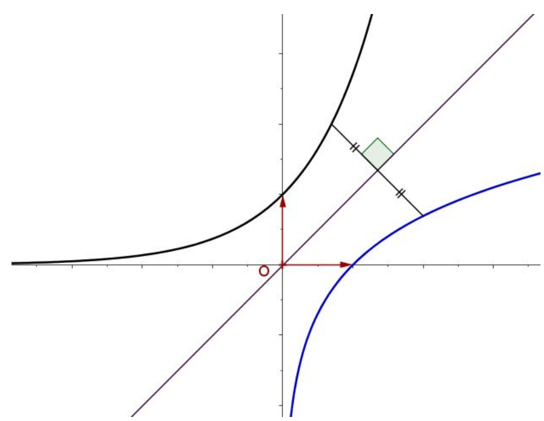
x	$-\infty$		$+\infty$
e^x	0	$\nearrow$	$+\infty$

➤ La fonction exp induit une **bijection** de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$
➤ $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$

Les fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^{\ln x} = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ln(\mathrm{e}^x) = x$$

Dans un repère orthonormé du plan, les courbes représentatives de ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Cas particulier – Logarithme de base a. Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle fonction **logarithme de base** a et on note $\log_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

La fonction $\log_a$ est obtenue en multipliant ln par la constante $1/\ln(a)$; il est donc aisé d'en déduire ses propriétés.

Pour finir, observons que les valeurs "pratiques" de a sont 2 et 10. La fonction $\log_2$ intervient en effet en informatique, dans les calculs de complexité algorithmique ; quant à la fonction $\log_{10}$, elle sert entre autres dans les calculs de pH.

VI-2/ Fonctions exponentielles de base a

Définition. *Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle fonction* ***exponentielle de base*** a *et on note* $\exp_a$ *fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *en posant :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$$

Remarque — En particulier : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a^x > 0$.

Propriété. *Soit a un réel strictement positif, et $a \neq 1$.*
La fonction $\exp_a : x \longmapsto a^x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (\exp_a)'(x) = (\ln a) \times a^x$$

On déduit de cette propriété le sens de variation des fonctions exponentielles de base a.

Etude de $x \mapsto a^x \quad (0 < a < 1)$

➤ **Sens de variation** : strict. décroissante sur $\mathbb{R}$.

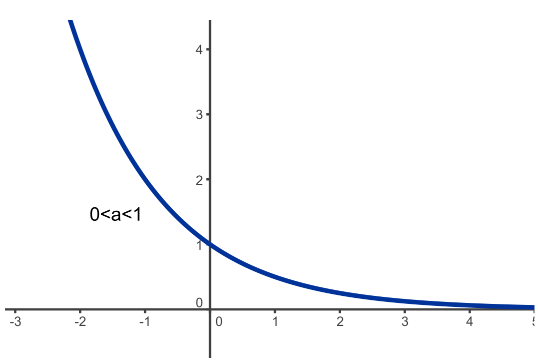
➤ **Limites aux bornes** :

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

➤ **Tableau de variation** :

$$\begin{array}{c|ccc}
x & -\infty & & +\infty \\
\hline
(\exp_a)' & & & \\
\hline
 & +\infty & & \\
a^x & & \searrow & \\
 & & & 0
\end{array}$$

➤ **Exemple de courbe représentative** :



Etude de $x \mapsto a^x \quad (a > 1)$

➤ **Sens de variation** : strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

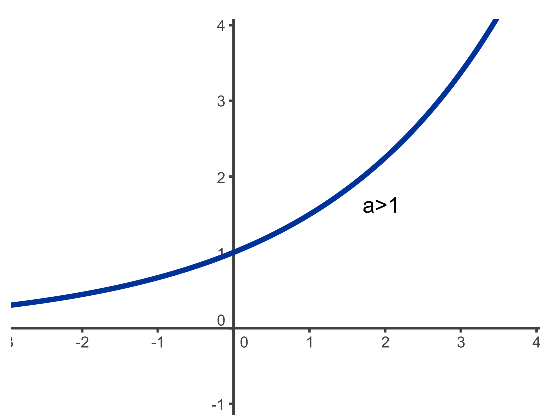
➤ **Limites aux bornes** :

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

➤ **Tableau de variation** :

$$\begin{array}{c|ccc}
x & -\infty & & +\infty \\
\hline
(\exp_a)' & & & \\
\hline
 & & & +\infty \\
a^x & & \nearrow & \\
 & 0 & &
\end{array}$$

➤ **Exemple de courbe représentative** :



Pour tout réel a (strictement positif et $\neq 1$), la fonction exponentielle de base a réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$, et “transforme les sommes en produits”.

VI-3/ Fonctions puissances

Définition. *Soit a un réel (quelconque). On appelle fonction* ***puissance d'exposant*** *a et nous noterons P_a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ définie en posant :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad P_a(x) = x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$$

Etude de $x \mapsto x^a \quad (a > 0)$

➤ **Sens de variation** : strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

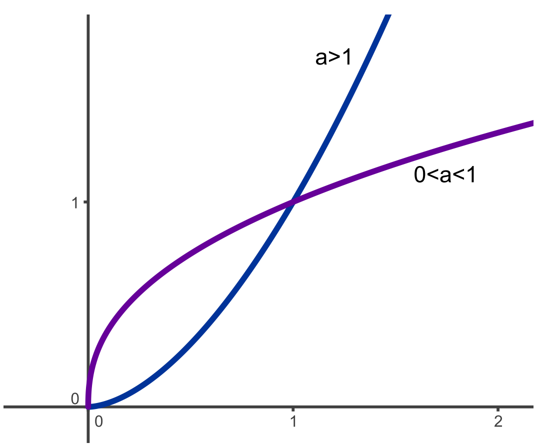
➤ **Limites aux bornes** :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^a = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty$$

➤ **Tableau de variation** :

x	0		$+\infty$
$P'_a(x)$	||	$+$	
x^a	|| 0	$\nearrow$	$+\infty$

➤ **Exemples de courbes représentatives** :



Etude de $x \mapsto x^a \quad (a < 0)$

➤ **Sens de variation** : strict. décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

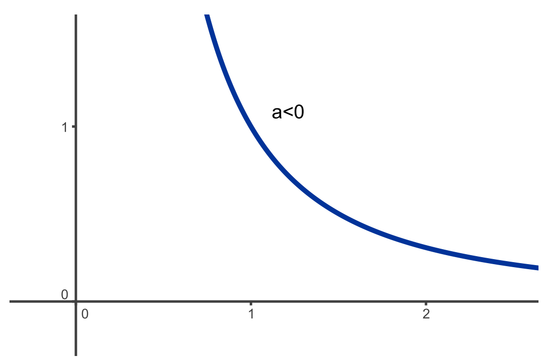
➤ **Limites aux bornes** :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^a = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x^a = 0$$

➤ **Tableau de variation** :

x	0		$+\infty$
$P'_a(x)$	||	$-$	
x^a	|| $+\infty$	$\searrow$	0

➤ **Exemple de courbe représentative** :



<u>Remarques</u> : Soit n un entier naturel strictement positif, et x un réel strictement positif. On appelle racine $n^{\text{ième}}$ de x, et on note $\sqrt[n]{x}$ le nombre $x^{\frac{1}{n}}$. C'est un cas particulier des fonctions x^a étudiées ci-dessus.

D'autre part, le graphique suggère que dans le cas $a > 0$, la fonction $P_a : x \mapsto x^a$ peut être *prolongée par continuité en* 0 en posant $P_a(0) = 0$. Ce choix est rendu légitime par le fait que si $a > 0$, la limite en 0 (à droite) de la fonction P_a est égale à 0.

VI-4/ Fonctions hyperboliques

➤ **La fonction cosinus hyperbolique (ch).**

La fonction ch est **définie** sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{ch} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array}$. ch est **paire**.

La fonction ch est **dérivable** (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$, et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$. Il s'ensuit que c'est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle admet donc un minimum en 0, égal à 1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Pour finir, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$, et (par parité) : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.

La tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_{\mathrm{ch}}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 1$ (tangente horizontale), et $\mathscr{C}_{\mathrm{ch}}$ est située au-dessus de cette tangente (puisque ch est minorée par 1).

➤ **La fonction sinus hyperbolique (sh).**

La fonction sh est **définie** sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{sh} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array}$. sh est **impaire**.

La fonction sh est **dérivable** (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$, et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$. Il s'ensuit que c'est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$			$+$		
$\mathrm{sh}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Enfin : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$, et (comme sh est impaire) : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$.

La tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_{\mathrm{sh}}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$ (première bissectrice des axes), et $\mathscr{C}_{\mathrm{sh}}$ est située au-dessus (*resp.* en-dessous) de cette tangente sur $\mathbb{R}_+$ (*resp.* sur $\mathbb{R}_-$).*