Colle 3 – Questions de cours

Question de cours n⁰1 — **(Quelques) propriétés des modules** : 1) $\forall\,(z,z')\in\mathbb{C}^2, |zz'|=|z|\times|z'|$;

2) $\forall\,z\in\mathbb{C}^*, |1/z|=1/|z|$; 3) $\forall\,z\in\mathbb{C}, \forall\,n\in\mathbb{N}, |z^n|=|z|^n$.

1) Soient z et z' dans $\mathbb{C}$. On a : $|zz'|=\sqrt{zz'\overline{(zz')}}=\sqrt{zz'\overline{z}\overline{z'}}=\sqrt{(z\overline{z})\left(z'\overline{z'}\right)}=\sqrt{z\overline{z}}\sqrt{z'\overline{z'}}=|z|\times|z'|$

Conclusion : $\boxed{\forall\,(z,z')\in\mathbb{C}^2, |zz'|=|z|\times|z'|}$.

2) Soit z dans $\mathbb{C}^*$. On a : $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\sqrt{\dfrac{1}{z}\times\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}}=\sqrt{\dfrac{1}{z}\times\dfrac{1}{\overline{z}}}=\sqrt{\dfrac{1}{z\overline{z}}}=\dfrac{1}{\sqrt{z\overline{z}}}=\dfrac{1}{|z|}$

Conclusion : $\boxed{\forall\,z\in\mathbb{C}^*, |1/z|=1/|z|}$.

3) Soit z un nombre complexe. Notons, pour tout entier naturel n, $P(n)$ l'assertion : "$|z^n|=|z|^n$".
Raisonnons par récurrence sur l'entier naturel n.

➤ **Initialisation** ($n=0$). D'une part : $\left|z^0\right|=|1|=1$. D'autre part : $|z|^0=1$. La propriété $P(0)$ est donc vraie.

➤ **Hérédité**. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. On a :

$$\left|z^{n+1}\right|=|z^n\times z|=|z^n|\times|z|=|z|^n\times|z|=|z|^{n+1}$$

En résumé : $\left|z^{n+1}\right|=|z|^{n+1}$. Ce qui assure que $P(n+1)$ est vraie, et établit donc l'hérédité de la propriété.

➤ On peut alors affirmer que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, et puisque le nombre complexe z est arbitraire dans le raisonnement précédent, on a : $\boxed{\forall\,z\in\mathbb{C}, \forall\,n\in\mathbb{N}, |z^n|=|z|^n.}$

Question de cours n⁰2 — **Inégalité triangulaire** : $\forall\,(z,z')\in\mathbb{C}^2,\ |z+z'|\leqslant|z|+|z'|$.

Soient z et z' deux nombres complexes. On a :

$$\begin{aligned}
&|z+z'|^2=(z+z')\overline{(z+z')}\\
\Longleftrightarrow\ &|z+z'|^2=z\overline{z}+z\overline{z'}+\overline{z}z'+z'\overline{z'}\\
\Longleftrightarrow\ &|z+z'|^2=|z|^2+z\overline{z'}+\overline{z}z'+|z'|^2\\
\Longleftrightarrow\ &|z+z'|^2=|z|^2+z\overline{z'}+\overline{z\overline{z'}}+|z'|^2\\
\Longleftrightarrow\ &|z+z'|^2=|z|^2+2\text{Re}\left(z\overline{z'}\right)+|z'|^2
\end{aligned}$$

Or : $\text{Re}\left(z\overline{z'}\right)\leqslant\left|z\overline{z'}\right|$.* En observant judicieusement que $\left|z\overline{z'}\right|=|z|\,|z'|$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
&|z+z'|^2\leqslant|z|^2+2\,|z|\,|z'|+|z'|^2\\
\Longleftrightarrow\ &|z+z'|^2\leqslant(|z|+|z'|)^2
\end{aligned}$$

Cette inégalité ne faisant intervenir que des réels positifs, on peut conclure : $\boxed{|z+z'|\leqslant|z|+|z'|}$.

Question de cours n⁰3 — **Inégalité triangulaire généralisée** :

$$\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\,(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n,\ |z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$$

Notons, pour tout entier naturel non nul n, $P(n)$ l'assertion : "$\forall\,(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n,\ \left|\displaystyle\sum_{k=1}^n z_k\right|\leqslant\displaystyle\sum_{k=1}^n|z_k|$".

➤ **Initialisation**. L'assertion $P(1)$ est vraie puisque : $\forall\,z_1\in\mathbb{C},\ |z_1|\leqslant|z_1|\ldots$

➤ **Hérédité**. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel non nul n, et soit $(z_1,\ldots,z_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1}$.
D'après l'inégalité triangulaire "classique" (celle de la QC2), on a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1}z_k\right|=\left|\left(\sum_{k=1}^{n}z_k\right)+z_{n+1}\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|+|z_{n+1}|$$

D'où, par hypothèse de récurrence :

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1}z_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|z_k|+|z_{n+1}|\qquad\text{d'où : }\left|\sum_{k=1}^{n+1}z_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n+1}|z_k|$$

En résumé : $\forall\,(z_1,\ldots,z_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1},\ \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}z_k\right|\leqslant\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}|z_k|$. $P(n+1)$ est donc vraie.

➤ **Conclusion**. $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\,(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n,\ \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\leqslant\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|$.

---

*. Cette inégalité provient du lemme (qui peut être admis ici) affirmant que : $\forall\,z\in\mathbb{C},\ |\text{Re}(z)|\leqslant|z|$ et $|\text{Im}(z)|\leqslant|z|$.

QUESTION DE COURS N^{0}4 — **Exercice**. Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ (et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

Soient n et k deux entiers naturels et θ un réel. On a : $\cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right)$ et $\sin(k\theta) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right)$. †

Par conséquent :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ik\theta}\right) \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}\right), \text{ et de façon analogue : } \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}\right)$$

Il “ne reste plus qu'à” calculer la somme entre parenthèses pour achever la question de cours. En effet, en posant :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}, \text{ on a donc : } \boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \mathrm{Re}(S_n) \quad (\spadesuit)} \text{ et } \boxed{\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \mathrm{Im}(S_n) \quad (\clubsuit)}$$

Or : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} \iff S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^k$

S_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On peut donc lui appliquer la formule que vous connaissez bien ‡, sous réserve que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$, c'est-à-dire si $\theta \neq 0 \ [2\pi]$.

On suppose donc $\theta \neq 0 \ [2\pi]$. Alors :

$$S_n = \frac{1-\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \Longleftrightarrow S_n = \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \Longleftrightarrow S_n = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right)} \quad \textit{(technique de “l'angle-moitié”)}$$

$$\Longleftrightarrow S_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n\theta}{2}\right)} \frac{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \text{ d'où finalement : } \boxed{S_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n\theta}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (\heartsuit)}$$

On déduit de ($\spadesuit$), ($\clubsuit$) et ($\heartsuit$) que :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \theta \neq 0 \ [2\pi]\,,\ \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}.$$

Dans le cas où $\theta = 0 \ [2\pi]$, on a $\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = 0$ d'où

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \theta = 0 \ [2\pi]\,,\ \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = n+1 \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = 0}.$$

QUESTION DE COURS N^{0}5 — **Exercice**. Linéarisation de $\sin^5(\theta)$.

Pour tout réel θ, on a : $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$. Il s'ensuit que § :

$$\sin^5(\theta) = \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^5}{(2\mathrm{i})^5} = \frac{1}{32\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\theta} - 5\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} + 10\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 10\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + 5\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\theta}\right)$$

Donc :

$$\sin^5(\theta) = \frac{1}{32\mathrm{i}}\left(\underbrace{\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\theta}}_{=2\mathrm{i}\sin(5\theta)} - 5\left(\underbrace{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}}_{=2\mathrm{i}\sin(3\theta)}\right) + 10\left(\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}_{=2\mathrm{i}\sin(\theta)}\right)\right)$$

Par suite :

$$\sin^5(\theta) = \frac{1}{32\mathrm{i}}\left(2\mathrm{i}\sin(5\theta) - 10\mathrm{i}\sin(3\theta) + 20\mathrm{i}\sin(\theta)\right)$$

Conclusion. $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \sin^5(\theta) = \dfrac{1}{16}\ \sin(5\theta) - \dfrac{5}{16}\ \sin(3\theta) + \dfrac{5}{8}\ \sin(\theta)$

---

†. Puisqu'en général pour tout réel ☺, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}☺} = \cos(☺) + \mathrm{i}\sin(☺)$. Prendre ☺ $= k\theta$ dans le présent cas.

‡. $\forall\, q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

§. Essentiellement car : $2^5 = 32$; $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}$; et $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

Question de cours n⁰6 — **Exercice**. Délinéarisation de $\cos(4\theta)$ *(exprimer $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$).*

Soit θ un réel arbitraire. On a : $\cos(4\theta) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right]^4\right)$.

Par suite [¶] : $\cos(4\theta) = \mathrm{Re}\left([\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)]^4\right) \qquad (\spadesuit)$.

Or :

$$[\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)]^4 = \cos^4(\theta) + 4\mathrm{i}\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4\mathrm{i}\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta) \qquad (\clubsuit)$$

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) :

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta)$$

D'où (en utilisant la relation fondamentale de la trigo) :

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) + (1 - \cos^2(\theta))^2$$

Conclusion. $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$

Trois autres exemples de linéarisation

➤ **Exemple 1. Linéarisation de** $\cos^3(\theta)$. Soit θ un réel. On a :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right) \qquad \text{d'où :} \quad \cos^3(\theta) = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right)^3$$

Il s'ensuit [‖] que :

$$\cos^3(\theta) = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\,\theta} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\,\theta}\right) = \frac{1}{8}\left(\underbrace{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\,\theta}}_{=2\cos(3\theta)} + \underbrace{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}_{=6\cos(\theta)}\right)$$

D'où finalement : $\boxed{\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \cos^3(\theta) = \dfrac{\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)}{4}}$.

➤ **Exemple 2. Linéarisation de** $\sin^3(\theta)$. Soit θ un réel. On a :

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right) \qquad \text{d'où :} \quad \sin^3(\theta) = -\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right)^3$$

Il s'ensuit [**] que :

$$\sin^3(\theta) = -\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\,\theta} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\,\theta}\right) = -\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(\underbrace{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\,\theta}}_{=2\mathrm{i}\sin(3\theta)} - \underbrace{\left(3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right)}_{=-6\mathrm{i}\sin(\theta)}\right)$$

D'où finalement : $\boxed{\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \sin^3(\theta) = \dfrac{3\sin(\theta) - \sin(3\theta)}{4}}$.

➤ **Exemple 3. Linéarisation de** $\cos^4(\theta)$. Soit θ un réel. On a :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right) \qquad \text{d'où :} \quad \cos^4(\theta) = \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right)^4$$

Il s'ensuit [††] que :

$$\cos^4(\theta) = \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\,\theta} + 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\theta} + 6 + 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\,\theta}\right) = \frac{1}{16}\left(\underbrace{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\,\theta}}_{=2\cos(4\theta)} + \underbrace{4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\theta} + 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,\theta}}_{=8\cos(\theta)} + 6\right)$$

D'où finalement : $\boxed{\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \cos^4(\theta) = \dfrac{\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3}{8}}$.

¶. On peut d'ailleurs se passer de la ligne précédente, en invoquant la formule de Moivre.
‖. D'après la formule du binôme de Newton : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
**. D'après la formule du binôme de Newton : $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
††. D'après la formule du binôme de Newton : $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.