MPSI – Colle 3 (3 au 7 octobre 2022) : Trigo (révisions) – Nombres complexes

Chapitre 3 : Trigonométrie

Tout, et en particulier le formulaire.

Chapitre 4 : Nombres complexes

1 – Généralités. Définition de $\mathbb{C}$, partie réelle, partie imaginaire, imaginaire pur. Représentation géométrique : plan complexe, point image, affixe.

2 – Conjugaison. Définition du conjugué. Propriétés algébriques des conjugués. Un nombre complexe z et son conjugué $\bar{z}$ ont pour images des points symétriques par rapport à l'axe réel. Conséquence : un complexe z est réel (*resp.* imaginaire pur) SSI $\bar{z} = z$ (*resp.* $\bar{z} = -z$).

3 – Module

Définition : $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ (si $z = a + ib$ alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$). Rques : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ |z| \in \mathbb{R}_+$; et $\forall\, z \in \mathbb{C},\ |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.

Interprétation géométrique : si $z \in \mathbb{C}$, alors $|z|$ est la longueur $OM(z)$ (où $M(z)$ désigne le point du plan complexe d'affixe z).

Propriétés algébriques : concernant $|zz'|$, $|1/z'|$, $|z/z'|$, $|\bar{z}|$ et $|z^n|$.

Inégalité triangulaire : $\forall\ (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

4 – Ensemble des nombres complexes de module 1

Définition : $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Interprétation géométrique : $\mathbb{U}$ est l'ensemble des affixes des points appartenant au cercle trigonométrique.

Propriété : $\mathbb{U}$ est stable par produit, conjugaison et passage à l'inverse *($\mathbb{U}$ est un groupe pour la loi $\times$).*

Définition : pour tout réel x, on pose $\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$. Rque : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \left|\mathrm{e}^{ix}\right| = 1$.

Propriétés : $\mathrm{e}^{i(x+y)} = \mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{iy}$; $\overline{\mathrm{e}^{ix}} = \mathrm{e}^{-ix} = \left(\mathrm{e}^{ix}\right)^{-1}$; $\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^n = \mathrm{e}^{inx}$.

Formules d'Euler — **Formule de Moivre**.

Applications — **Linéarisation** (exemple avec $\cos^4\theta$). **Délinéarisation** (exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$). Factorisation (**technique de "l'angle-moitié"**) ; calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$, de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$, de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)\ldots$ pour tout réel θ.

5 – Argument(s) d'un nombre complexe NON-NUL

Propriété-définition : tout nombre complexe non-nul z peut s'écrire sous la forme $|z|\,\mathrm{e}^{i\theta}$, où θ est un réel unique modulo 2π : il est appelé **argument** du nombre complexe z, et est noté $\arg(z)$.

Propriétés des arguments : formules donnant $\arg(zz')$, $\arg(1/z')$, $\arg(z/z')$, $\arg(z^n)$, et $\arg(\bar{z})$ pour z et z' complexes non-nuls et n entier.

6 – Exponentielle complexe

Définition : pour tout $z \in \mathbb{C}$, de forme algébrique $z = a + ib$, on pose $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{ib}$.

Propriétés : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\arg(\mathrm{e}^z) = \mathrm{Im}(z)$. En outre $\mathrm{e}^z \neq 0$ (ainsi la fonction $z \longmapsto \mathrm{e}^z$ est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$).

De plus, la fonction exponentielle est $2i\pi$**-périodique**.

Théorème : pour tout complexe non-nul ω, l'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{e}^z = \omega$ est $\{\ln|\omega| + \mathrm{i}\arg(\omega) + 2\mathrm{i}k\pi\ /\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Questions de cours

QC 1/ **(Quelques) propriétés des modules** : 1) $\forall\,(z,z') \in \mathbb{C}^2, |zz'| = |z| \times |z'|$; 2) $\forall\, z \in \mathbb{C}^*, |1/z| = 1/|z|$; 3) $\forall\, z \in \mathbb{C}, \forall\, n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$.

QC 2/ **Inégalité triangulaire** : $\forall\ (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ |z+z'| \leqslant |z| + |z'|$

QC 3/ **Inégalité triangulaire généralisée** : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n,\ |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$

QC 4/ **Exercice** : calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ (et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

QC 5/ **Exercice** : linéarisation de $\sin^5(\theta)$.

QC 6/ **Exercice** : délinéarisation de $\cos(4\theta)$.

Objectifs de la semaine :

- **Ne pas oublier ce qui a été vu les premières semaines. Pour ne pas répéter cette phrase sur chaque programme de colle, il faut que vous connaissiez, jusqu'à la fin de la Spé et sans qu'il soit nécessaire de le rappeler explicitement, toutes les techniques "élémentaires" des semaines précédentes. Cela inclut en particulier les sommes usuelles ($\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k,\ \sum_{k=1}^{n} k^2,\ \sum_{k=1}^{n} k^3$, les sommes géométriques et télescopiques), la formule du binôme de Newton, et l'incontournable formulaire de trigonométrie**.
- **Connaître son cours**, ce qui signifiera comme chaque semaine jusqu'à la fin de l'année, connaître les énoncés des définitions, propriétés, théorèmes, et avoir compris les démonstrations et exemples d'application.
- Au regard des innombrables services qu'elle nous rendra en Analyse cette année, maîtriser parfaitement l'**inégalité triangulaire** (énoncé et démonstration).

  Au passage, il sera certainement utile dans les semaines à venir de connaître sa forme "généralisée" (pour tout entier $n \geqslant 1$) :

  $$\forall\,(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n,\ |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

- Savoir **calculer un module et un argument**.
- Savoir appliquer les **formules d'Euler**, et les applications à la **linéarisation**, **"délinéarisation"**, et la **technique de l'angle-moitié**.