Extraits de DS de septembre

Exercice 1 — (Linéarisation)

Soit θ un réel quelconque. Etablir que :

$$\cos^5(\theta) = a\cos(5\theta) + b\cos(3\theta) + c\cos(\theta)$$

où a, b et c sont trois réels à préciser.

Exercice 2 — (Equation trigonométrique)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E) \qquad \cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$$

Exercice 3 — (Trigonométrie)

Soit θ un réel tel que $\theta \neq 0 \ [\pi]$. Démontrer que :

$$\cos(\theta) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Exercice 4 — (Sommes)

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul, et q un nombre complexe. Calculer les sommes suivantes :

1/ $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k q^k$ 2/ $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k q^k$ 3/ $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$

Exercice 5 — (Applications du cours).

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E_1) : $\sin(4x) + \sin(9x) + \sin(14x) = 0$.

2/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_2) : $z^2 - (1+\mathrm{i})z + \mathrm{i} = 0$.

3/ Pour tout réel θ, linéariser $\sin^4(\theta)$.

4/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \overline{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$.

5/ Soit n un entier naturel. Etablir que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

Exercice 6 — (Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$).

1/ A l'aide de la formule de duplication pour le cosinus, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2/ **Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.** On sait, ou on peut établir sans trop de difficultés que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

On peut conjecturer que pour tout entier naturel non nul on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{\cdots+}\cdots+\sqrt{2}}}}}{2}$$

en ayant noté dans cette formule un certain nombre de signes "+", de "$\sqrt{\ }$", et de petits points.

L'objet de cette partie est de transformer cette peu sérieuse observation en énoncé précis, et de le démontrer. A cette fin, on introduit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie en posant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$;
- la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par : $\quad v_1 = 0 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = \sqrt{2+v_n}$.

a/ Etablir que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive.

b/ Etablir que : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{v_n}{2}$.

Corrigé

Exercice 1 — (Linéarisation)

Soit θ un réel quelconque. Selon la formule d'Euler pour le cosinus on a :

$$\cos^5(\theta) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^5 = \frac{1}{32}\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\theta}+5\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}+10\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+10\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}+5\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{32}\left(2\cos(5\theta)+10\cos(3\theta)+20\cos(\theta)\right)$$

Conclusion $\forall\,\theta\in\mathbb{R},\ \cos^5(\theta) = \dfrac{1}{16}\cos(5\theta)+\dfrac{5}{16}\cos(3\theta)+\dfrac{5}{8}\cos(\theta)$

Exercice 2 — (Equation trigonométrique)

Pour tout réel x, on a : $\left(\cos^2(x)+\sin^2(x)\right)^2 = 1$. D'où : $\cos^4(x)+2\cos^2(x)\sin^2(x)+\sin^4(x)=1$.

On en déduit que : $\cos^4(x)+\sin^4(x)=1 \iff 2\cos^2(x)\sin^2(x)=0 \iff \cos(x)=0 \vee \sin(x)=0$

Conclusion. $\cos^4(x)+\sin^4(x)=1 \iff x=0\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

Exercice 3 — (Trigonométrie)

Soit θ un réel tel que $\theta\neq 0\ [\pi]$.

D'une part :

$$\frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1-\dfrac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{1+\dfrac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = \frac{\left(\dfrac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)}{\left(\dfrac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)}{1} = \cos(\theta)$$

(puisque $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\cos(\theta)$ * et $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=1$ †).

Conclusion. $\forall\theta\in\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z},\ \cos(\theta)=\dfrac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

∗. Formule de duplication pour le cos.
†. Relation fondamentale de la trigonométrie.

D'autre part :

$$\frac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\dfrac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{1+\dfrac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = \frac{\left(\dfrac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)}{\left(\dfrac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \sin\left(2\times\frac{\theta}{2}\right) = \sin(\theta)$$

(puisque $2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin(\theta)$ ‡).

Conclusion. $\forall \theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z},\ \sin(\theta) = \dfrac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

Exercice 4 — (Sommes)

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul, et q un nombre complexe.

1/ On a : $S_1 = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k q^k = \sum_{k=0}^{2n}(-q)^k$. C'est la somme des $(2n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $(-q)$. On distingue donc deux cas :

Si $q=-1$: $S_1 = \sum_{k=0}^{2n} 1 = 2n+1$

Si $q\neq -1$: $S_1 = \dfrac{1-(-q)^{2n+1}}{1+q} = \dfrac{1-(-q)^{2n+1}}{1+q} = \dfrac{1+q^{2n+1}}{1+q}$

Conclusion. Si $q \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ alors $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k q^k = \dfrac{1+q^{2n+1}}{1+q}$. Si $q=-1$, alors $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k q^k = 2n+1$.

2/ $S_2 = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k q^k = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-q)^k = (1-q)^{2n}$ (selon la formule du binôme de Newton).

Conclusion. $\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k q^k = (1-q)^{2n}$.

3/ L'idée est de séparer la somme suivant les termes de rang pair et ceux de rang impair. On a :

$$S_3 = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2 = \sum_{k=0,\ k\text{ pair}}^{2n}(-1)^k k^2 + \sum_{k=0,\ k\text{ impair}}^{2n}(-1)^k k^2 = \sum_{k=0,\ k\text{ pair}}^{2n} k^2 - \sum_{k=0,\ k\text{ impair}}^{2n} k^2$$

Par suite : $S_3 = \sum_{k=0}^{n} 4k^2 - \sum_{k=0}^{n-1}\left(4k^2+4k+1\right) = \underbrace{4\sum_{k=0}^{n}k^2 - 4\sum_{k=0}^{n-1}k^2}_{=4n^2} - \underbrace{4\sum_{k=0}^{n-1}k}_{=2n(n-1)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}1}_{=n} = 2n^2+n$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2 = n(2n+1)$.

‡. Formule de duplication pour le sin.

Exercice 5 — (Applications du cours).

1/ Pour tout couple de réels (p,q) on a : $\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

Par suite : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ \sin(14x)+\sin(4x)=2\sin(9x)\cos(5x)$.

D'où : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ \sin(4x)+\sin(9x)+\sin(14x)=\sin(9x)\left(2\cos(5x)+1\right)$.

On en déduit que pour x réel : $[\sin(4x)+\sin(9x)+\sin(14x)=0]\Leftrightarrow\left[\sin(9x)=0 \text{ ou } \cos(5x)=-\dfrac{1}{2}\right]$ $(\spadesuit)$.

Or : $[\sin(9x)=0]\Longleftrightarrow[9x=0\,[\pi]\,]\Longleftrightarrow\left[x=0\ \left[\dfrac{\pi}{9}\right]\right]$ $(\clubsuit)$.

Et : $\left[\cos(5x)=-\dfrac{1}{2}\right]\Longleftrightarrow\left[5x=\pm\dfrac{2\pi}{3}\,[2\pi]\right]\Longleftrightarrow\left[x=\pm\dfrac{2\pi}{15}\ \left[\dfrac{2\pi}{5}\right]\right]$ $(\heartsuit)$.

On déduit de $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$ que :

$$\boxed{[\sin(4x)+\sin(9x)+\sin(14x)=0]\Longleftrightarrow\left[x=0\ \left[\dfrac{\pi}{9}\right]\quad\text{ou}\quad x=\pm\dfrac{2\pi}{15}\ \left[\dfrac{2\pi}{5}\right]\right]}$$

2/ L'équation (E_2) : $z^2-(1+\mathrm{i})z+\mathrm{i}=0$ est du second degré à coefficients complexes.

Le complexe 1 est racine évidente de l'équation. Puisque le produit des racines est égal à i,[§] la seconde racine est i. $\boxed{\textbf{Conclusion.}\ [z^2-(1+\mathrm{i})z+\mathrm{i}=0]\Longleftrightarrow[z=1\quad\text{ou}\quad z=\mathrm{i}]}$

Méthode alternative. Si on ne pense pas à la racine évidente, on utilise la méthode "normale". Le discriminant est : $\Delta=\left(1+\mathrm{i}^2\right)-4\mathrm{i}$ soit $\Delta=-2\mathrm{i}$. Autrement écrit : $\Delta=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$. On en déduit que les racines carrées de Δ sont $\pm\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$.

On peut observer que : $\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-\mathrm{i}$.

Il s'ensuit que les solutions de (E_2) sont : $\dfrac{1+\mathrm{i}\pm(1-\mathrm{i})}{2}$, c'est à dire : 1 et i. [¶]

3/ Soit θ un réel. On a :

$$\sin^4(\theta)=\frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^4}{(2\mathrm{i})^4}=\frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta}-4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+6-4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta}\right)=\frac{1}{16}\left(2\cos(4\theta)-8\cos(2\theta)+6\right)$$

$\boxed{\textbf{Conclusion.}\ \forall\,\theta\in\mathbb{R},\ \sin^4(\theta)=\dfrac{1}{8}\cos(4\theta)-\dfrac{1}{2}\cos(2\theta)+\dfrac{3}{8}}$.

§. Pour l'équation $az^2+bz+c=0$, le produit des racines est égal à $\dfrac{c}{a}$.

¶. Il est rassurant de parvenir à la même conclusion que précédemment !

4/ Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'assertion : "$\forall\ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$".

L'assertion $P(1)$ est trivialement vraie (et $P(2)$ est vraie d'après le cours) ($\spadesuit$).

Supposons à présent que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On a :

$$\overline{\left(\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right)} = \overline{\left(\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) + z_{n+1}\right)} \underbrace{=}_{cours} \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)} + \overline{z_{n+1}} \underbrace{=}_{HR} \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} + \overline{z_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \overline{z_k}$$

Ainsi : $\forall\ (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1},\ \overline{\left(\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right)} = \sum_{k=1}^{n+1} \overline{z_k}$. Ce qui signifie que l'assertion $P(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété ($\clubsuit$).

On déduit de ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

$$\boxed{\textbf{Conclusion. } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}}$$

5/ Soit n un entier naturel. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/3}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}\right)^k\right) = \mathrm{Im}\left(\left(1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}\right)^n\right) \qquad (\spadesuit)$$

Or : $\left(1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}\right)^n = \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\right)\right]^n = \left[2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^n = \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\right]^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/3} \quad (\clubsuit)$

On déduit de ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}$.

Exercice 6 — **(Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$).**

1/ D'après le formulaire de trigo : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$, d'où : $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}$.

Ainsi : $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$. On en déduit que : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Pour conclure, il suffit d'observer que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est strictement positif, puisque $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$.

Conclusion. $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

2/ a/ Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'assertion : "$v_n \geqslant 0$".

L'assertion $P(1)$ est vraie d'après l'énoncé (♠).

Supposons à présent que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $v_{n+1} = \sqrt{2+v_n}$, et que $v_n \geqslant 0$ (HR), on en déduit que $v_{n+1} \geqslant 0$. Donc l'assertion $P(n+1)$ est vraie. On a établi l'hérédité de la propriété (♣).

On déduit de (♠) et (♣) que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant 0$

b/ Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'assertion : "$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{v_n}{2}$".

L'assertion $P(1)$ est vraie puisque $v_1 = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (♠).

Supposons à présent que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Une nouvelle application de la formule de duplication donne :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 1. \qquad \text{D'où : } \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence : $\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1+\frac{v_n}{2}}{2} = \frac{2+v_n}{4}$ (♡)

Puisque $2+v_n$ est positif (question précédente), et que $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ est positif (car $0 < \frac{\pi}{2^n} \leqslant \frac{\pi}{2}$), on déduit de (♡) que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2+v_n}}{2} \qquad \text{soit encore : } \quad \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{v_{n+1}}{2}$$

Cette dernière égalité signifie que l'assertion $P(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété (♣).

On déduit de (♠) et (♣) que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{v_n}{2}$.