Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}3 — 1er octobre 2022

Exercice 1 — (Applications diverses du cours).

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\text{(E1)} \qquad 16X^4 - 20X^2 + 5 = 0$$

On pose $Y = X^2$. L'équation (E) se réécrit alors : $16Y^2 - 20Y + 5 = 0$. Cette équation du second degré à coefficients réels possède un discriminant strictement positif : $\Delta = 80$. On en déduit qu'elle possède deux solutions : $Y_{+,-} = \dfrac{20 \pm 4\sqrt{5}}{32}$, soit encore : $Y_{+,-} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$.
Après avoir observé que ces deux solutions sont réelles positives, on peut conclure, en revenant à la variable initiale, que **l'équation (E) possède exactement 4 solutions réelles :**

$$\boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \quad \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \quad -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \quad \text{et } -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.}$$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\text{(E2)} \qquad \cos(2x) + \sin(3x) = 0$$

Soit x un réel. On a :

$$\begin{aligned}
& \cos(2x) + \sin(3x) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \cos(2x) = -\sin(3x) \\
\Longleftrightarrow\ & \cos(2x) = \sin(-3x) \qquad \text{(car sin impaire)} \\
\Longleftrightarrow\ & \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) \qquad \left(\text{car } \sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \text{ pour tout réel } \theta\right) \\
\Longleftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{c} 2x = \dfrac{\pi}{2} + 3x \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x = -\dfrac{\pi}{2} - 3x \ [2\pi] \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{c} x = -\dfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 5x = -\dfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Conclusion. $[\cos(2x) + \sin(3x) = 0] \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = -\dfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{10} \ \left[\dfrac{2\pi}{5}\right] \end{array}\right.$

3/ Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que : $|z+1| = |z|+1$.

Soit z un nombre complexe, de forme algébrique $a + ib$ (a et b réels).

D'une part : $|z|+1 = \sqrt{a^2+b^2}+1$

D'autre part : $|z+1| = |a+1+ib| = \sqrt{a^2+2a+1+b^2}$

On en déduit que :

$$|z+1| = |z|+1$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{a^2+2a+b^2+1} = \sqrt{a^2+b^2}+1$$

$$\Longleftrightarrow a^2+2a+b^2+1 = a^2+b^2+2\sqrt{a^2+b^2}+1$$

(équivalence conservée car $\sqrt{a^2+2a+b^2+1}$ et $\sqrt{a^2+b^2}+1$ positifs)

$$\Longleftrightarrow a = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Longleftrightarrow a \geqslant 0 \quad \text{et} \quad a^2 = a^2+b^2$$

$$\Longleftrightarrow a \geqslant 0 \quad \text{et} \quad b = 0$$

$$\Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}_+$$

Conclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $\left[|z+1| = |z|+1\right] \Longleftrightarrow \left[z \in \mathbb{R}_+\right]$

4/ Soit θ un réel. Linéariser $\sin^4(\theta)$.

Soit θ un réel. Selon la formule d'Euler pour le sinus, on a :

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right) \qquad \text{d'où :} \quad \sin^4(\theta) = \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right)^4$$

Il s'ensuit * que :

$$\sin^4(\theta) = \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\,\theta} - 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\theta} + 6 - 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\,\theta}\right) = \frac{1}{16}\left(\underbrace{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\,\theta}}_{=2\cos(4\theta)} - \underbrace{\left(4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\theta} + 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,\theta}\right)}_{=8\cos(2\theta)} + 6\right)$$

D'où finalement : $\boxed{\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \sin^4(\theta) = \dfrac{\cos(4\theta) - 4\cos(2\theta) + 3}{8}}$.

*. D'après la formule du binôme de Newton : $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

5/ Soit $\alpha \in [0, 2\pi]$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\text{(E3)} \qquad \mathrm{e}^z = \sin(\alpha)$$

On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs de α.

Soit α un réel, et soit z un complexe.

➢ **Premier cas** : $\alpha \in \{0, \pi, 2\pi\}$.

Dans ce cas, l'équation s'écrit : $\mathrm{e}^z = 0$. Elle n'admet aucune solution puisque l'exponentielle complexe ne s'annule pas.

➢ **Deuxième cas** : $\alpha \in \,]0, \pi[$.

Dans ce cas, $\sin(\alpha)$ est un réel strictement positif. On a donc :

$$\mathrm{e}^z = \sin(\alpha) \Longleftrightarrow z = \ln(\sin(\alpha)) \ \ [2\mathrm{i}\pi]$$

➢ **Troisième cas** : $\alpha \in \,]\pi, 2\pi[$.

Dans ce cas, $\sin(\alpha)$ est un réel strictement négatif. On a donc :

$$\mathrm{e}^z = \sin(\alpha) \Longleftrightarrow \mathrm{e}^z = -\sin(\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \Longleftrightarrow z = \ln(-\sin(\alpha)) + \mathrm{i}\pi \ \ [2\mathrm{i}\pi]$$

Conclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$, et soit $\alpha \in [0, 2\pi]$. On a :

$$\mathrm{e}^z = \sin(\alpha) \Longleftrightarrow \begin{cases} z = \ln(\sin(\alpha)) \ \ [2\mathrm{i}\pi] & \text{si } \alpha \in \,]0, \pi[\\ z = \ln(-\sin(\alpha)) + \mathrm{i}\pi \ \ [2\mathrm{i}\pi] & \text{si } \alpha \in \,]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

Enfin l'équation $\mathrm{e}^z = \sin(\alpha)$ n'a aucune solution lorsque $\alpha \in \{0, \pi, 2\pi\}$.

6/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\text{(E4)} \qquad \cos^6(x) + \sin^6(x) = 1$$

Soit x un réel. On a :

$$\begin{aligned}
&\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1 \\
\Longleftrightarrow\ & \Big(\underbrace{\cos^2(x) + \sin^2(x)}_{=1}\Big)^3 - 3\cos^4(x)\sin^2(x) - 3\cos^2(x)\sin^4(x) = 1 \\
\Longleftrightarrow\ & -3\cos^4(x)\sin^2(x) - 3\cos^2(x)\sin^4(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \cos^4(x)\sin^2(x) + \cos^2(x)\sin^4(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \cos^2(x)\sin^2(x)\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\iff \cos^2(x)\sin^2(x) = 0$$

$$\iff \cos(x) = 0 \quad \text{ou}\sin(x) = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\boxed{\textbf{Conclusion}. \text{ Soit } x \in \mathbb{R}. \text{ On a : } \left[\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1\right] \iff \left[x = 0 \quad \left[\frac{\pi}{2}\right]\right]}$$

Exercice 2 — (Un exercice classique).

Soit n un entier naturel. On note S_n la somme : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$.

Etablir que :

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\left(\frac{(2n+1)\,\pi}{6}\right)$$

Soit n un entier naturel.

On a : $\boxed{S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\pi/3}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\pi/3}\right) \quad (\spadesuit)}$.

Posons : $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\pi/3}$. On a : $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\pi/3} = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\right)^k$.

Observons que U_n est une somme géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/3}$ (différente de 1). On en déduit que :

$$U_n = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\pi/3}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\pi/6}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}} \times \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\pi/6} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\pi/6}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/6} \times \frac{-2\mathrm{i}\sin\left((n+1)\pi/6\right)}{-2\mathrm{i}\sin(\pi/6)}$$

Finalement : $U_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/6} \times \dfrac{\sin\left((n+1)\pi/6\right)}{\sin(\pi/6)}$ soit encore : $\boxed{U_n = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/6}\sin\left((n+1)\pi/6\right) \ (\clubsuit)}$.

On déduit de $(\spadesuit)$ et de $(\clubsuit)$ que : $S_n = 2\sin\left(n\pi/6\right)\sin\left((n+1)\pi/6\right)$.

Par conséquent[†] : $S_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\dfrac{(2n+1)\,\pi}{6}\right)$.

$$\boxed{\textbf{Conclusion}. \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\left(\frac{(2n+1)\,\pi}{6}\right)}.$$

†. En vertu de la formule : $2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$.

Exercice 3 — **(Valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$).**

1/ **Délinéarisation.** Soit θ un nombre réel. Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

Soit θ un réel. On a : $\sin(5\theta) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\theta}\right) = \mathrm{Im}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^5\right) = \mathrm{Im}\left((\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^5\right)$. Or :

$$(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^5 = \cos^5(\theta) + 5\mathrm{i}\cos^4(\theta)\sin(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) - 10\mathrm{i}\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + 5\cos(\theta)\sin^4(\theta) + \mathrm{i}\,\sin^5(\theta)$$

Donc, en extrayant la partie imaginaire de l'expression précédente ‡ :

$$\sin(5\theta) = 5\sin(\theta)\left(1 - \sin^2(\theta)\right)^2 - 10\sin^3(\theta)\left(1 - \sin^2(\theta)\right) + \sin^5(\theta)$$

$$= 5\sin(\theta) - 10\sin^3(\theta) + 5\sin^5(\theta) - 10\sin^3(\theta) + 10\sin^5(\theta) + \sin^5(\theta)$$

Conclusion. $\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \sin(5\theta) = 16\sin^5(\theta) - 20\sin^3(\theta) + 5\sin(\theta).$

2/ On pose $\omega = \sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$. A l'aide de la question précédente, établir qu'il existe trois entiers a, b et c, que l'on explicitera, tels que :

$$a\,\omega^5 + b\,\omega^3 + c\,\omega = 0$$

En donnant à θ la valeur $\pi/5$ dans la relation que l'on vient d'établir, on obtient :
$\sin(\pi) = 16\sin^5(\frac{\pi}{5}) - 20\sin^3(\frac{\pi}{5}) + 5\sin(\frac{\pi}{5})$.

En notant $\omega = \sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$, on a donc : $\boxed{16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega = 0}$.

3/ On considère à présent l'équation (E) : $\quad aX^5 + bX^3 + cX = 0.$

a/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).

Soit X un réel. On a :

$$[X \text{ est solution de (E)}] \iff [16X^5 - 20X^3 + 5X = 0] \iff [X = 0 \ \text{ ou } 16X^4 - 20X^2 + 5 = 0]$$

D'après l'exercice 1, **l'équation (E) possède exactement 5 solutions réelles :**

$$\boxed{0,\quad \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},\quad \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},\quad -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},\quad \text{et } -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.}$$

‡. Et en utilisant la relation fondamentale de la trigonométrie pour écrire $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$.

b/ On note X_1 et X_2 les deux solutions strictement positives de l'équation (E), de telle sorte que $X_1 < X_2$. Justifier que : $X_2 > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

L'énoncé suggère de poser : $X_2 = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$. On a : $X_2^2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$, et $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{4}{8}$.

Puisque $5+\sqrt{5} > 4$ (waouh !!!), on en déduit que : $\boxed{\underbrace{\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}}_{=X_2} > \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

4/ Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

D'après les questions 2 et 3-a, ω est une des 5 solutions de l'équation (E). Trois de ces solutions sont négatives ou nulles. Dans le même temps, on peut affirmer que $\omega > 0$, puisque : $\dfrac{\pi}{5} \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

La valeur exacte de ω est donc X_1 ou X_2. Pour trancher, on observe que : $0 < \dfrac{\pi}{5} < \dfrac{\pi}{4}$. Donc : $\omega = \sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) < \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, puisque la fonction sinus est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit que : $\omega < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. D'après la question 3-b, ceci implique que $\omega = X_1$.

Conclusion. $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$

Exercice 4 — (Inégalité triangulaire généralisée).

On admet l'inégalité triangulaire [§] : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ |z+z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Démontrer l'énoncé suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \forall\ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

càd, moins rigoureusement mais un tout petit peu plus explicitement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \forall\ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

§. Qui n'a donc pas à être redémontrée.

Pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$, notons $P(n)$ l'assertion : "$\forall\ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$".

Démontrons que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$ par récurrence sur n.

➤ **L'initialisation** (pour $n = 2$) est fournie par l'inégalité triangulaire du cours, rappelée dans l'énoncé. On peut donc affirmer que $P(2)$ est vraie.

➤ **Hérédité**. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel $n \geqslant 2$. Soient $z_1, \ldots, z_{n+1}$ (n+1) nombres complexes.

On a : $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) + z_{n+1}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{n+1}|}_{=\sum_{k=1}^{n+1} |z_k|}$

la première égalité provenant de la relation de Chasles pour les sommes ; la première inégalité provenant de l'inégalité triangulaire de l'énoncé ; la deuxième inégalité provenant de l'hypothèse de récurrence.

En résumé, on a établi que[¶] : $\forall\ (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1},\ \left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$.

Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie, et prouve donc l'hérédité.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \forall\ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$

Exercice 5 — (Formules d'Euler généralisées)

On appelle **formules d'Euler généralisées** les formules ci-dessous valides pour tout couple de réels (α, β) :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)/2} \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)/2} \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

1/ Démontrer la formule d'Euler généralisée suivante :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)/2} \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Soient α et β deux réels. On a : $\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\beta)/2}}{2\mathrm{i}}$

D'où : $2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)/2} \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\beta)/2}\right) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha/2} - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta/2}$

Conclusion. $\forall\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\quad 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)/2} \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$

¶. Les nombres complexes $z_1, \ldots, z_{n+1}$ étant arbitraires dans le raisonnement précédent.

2/ Déterminer le module et un argument du nombre complexe :

$$Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/5} - \mathrm{i}$$

Posons $Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/5} - \mathrm{i}$. On a : $Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/5} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$.

En s'inspirant de la question précédente, notons que : $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{7\pi}{20}$.

Donc : $Z = \mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/20}\left(\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/20} - \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/20}\right) = -2\mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/20}\sin\left(\dfrac{3\pi}{20}\right) = -2\pi\mathrm{e}^{17\mathrm{i}\pi/20}\sin\left(\dfrac{3\pi}{20}\right)$

$$= \underbrace{2\pi\sin\left(\frac{3\pi}{20}\right)}_{\geqslant 0}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/20}$$

Conclusion : $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/5} - \mathrm{i}\right| = 2\pi\sin\left(\dfrac{3\pi}{20}\right)$ et $\arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/5} - \mathrm{i}\right) = -\dfrac{3\pi}{20} \quad [2\pi]$

EXERCICE 6 — (COSINUS HYPERBOLIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE)).
On définit une fonction sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, appelée **cosinus hyperbolique complexe** et notée CH, en posant :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{CH}(z) = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

1/ Montrer que la fonction CH est périodique, de période $2\mathrm{i}\pi$.

Soit z un complexe. On a, par $2\mathrm{i}\pi$-périodicité de l'exponentielle complexe :

$$\mathrm{CH}(z+2\mathrm{i}\pi) = \frac{\mathrm{e}^{z+2\mathrm{i}\pi} + \mathrm{e}^{-z-2\mathrm{i}\pi}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2} = \mathrm{CH}(z)$$

Conclusion. $\forall\, z \in \mathbb{C},\ \mathrm{CH}(z+2\mathrm{i}\pi) = \mathrm{CH}(z)$. La fonction CH est $2\mathrm{i}\pi$-périodique.

2/ Montrer que la fonction CH est paire.

La fonction CH est définie sur $\mathbb{C}$, qui est symétrique par rapport à zéro, et il est clair que :

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \mathrm{CH}(-z) = \mathrm{CH}(z).$$

Conclusion. La fonction CH est paire.

3/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{CH}(z) = 0$.

Soit z un nombre complexe. On a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{CH}(z) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \mathrm{e}^z = -\mathrm{e}^{-z} \\
\Longleftrightarrow\ & \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{-z+\mathrm{i}\pi} \\
\Longleftrightarrow\ & z = -z + \mathrm{i}\pi \quad [2\mathrm{i}\pi] \\
\Longleftrightarrow\ & 2z = \mathrm{i}\pi \quad [2\mathrm{i}\pi] \\
\Longleftrightarrow\ & z = \frac{\mathrm{i}\pi}{2} \quad [\mathrm{i}\pi]
\end{aligned}$$

Conclusion. Soit z un complexe. On a : $[\mathrm{CH}(z) = 0] \Longleftrightarrow \left[z = \dfrac{\mathrm{i}\pi}{2} \quad [\mathrm{i}\pi]\right]$

4/ Soit λ un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{CH}(z) = \lambda$.

Soit λ un réel, et soit z un nombre complexe. On a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{CH}(z) = \lambda \qquad (\text{équation (E1)}) \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} = \lambda \\
\Longleftrightarrow\ & \mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} - 2\lambda = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \mathrm{e}^{2z} - 2\lambda \mathrm{e}^z + 1 = 0
\end{aligned}$$

Dans cette équation, on pose : $X = \mathrm{e}^z$. Ce faisant, on a : $X^2 - 2\lambda X + 1 = 0$ (équation (E1)).

Cette équation du second degré a comme discriminant : $\Delta = 4\left(\lambda^2 - 1\right)$.

On distingue alors plusieurs cas.

➢ **Premier cas** : $\Delta = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \pm 1$.

Alors l'équation (E2) possède une unique solution : λ. En revenant à la variable initiale, on en déduit que :

$$\mathrm{e}^z = \lambda$$

Et on distingue donc deux sous-cas suivant que $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

➤ **Premier sous-cas** : $\lambda = 1$.

Alors z est solution de (E1) SSI $\mathrm{e}^z = 1$, càd SSI : $z = 0 \quad [2\mathrm{i}\pi]$.

➤ **Deuxième sous-cas** : $\lambda = -1$.

Alors z est solution de (E1) SSI $e^z = -1$, càd SSI : $z = i\pi \quad [2i\pi]$.

➢ **Deuxième cas** : $\Delta > 0 \iff |\lambda| > 1$.

Alors l'équation (E2) possède exactement deux solutions réelles :

$$\frac{2\lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2-1}}{2} \qquad \text{soit} \qquad \lambda \pm \sqrt{\lambda^2-1}$$

En revenant à la variable initiale, on en déduit que :

$$e^z = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2-1}$$

Et on distingue donc deux sous-cas suivant le signe de ces valeurs.

➤ **Premier sous-cas** : $\lambda > 1$.

Alors z est solution de (E1) SSI $e^z = \underbrace{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-1}}_{\in \mathbb{R}_+^*}$, càd SSI : $z = \ln\left(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-1}\right) \quad [2i\pi]$.

➤ **Deuxième sous-cas** : $\lambda < 1$.

Alors z est solution de (E1) SSI $e^z = \underbrace{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-1}}_{\in \mathbb{R}_-^*}$, càd SSI : $z = \ln\left(-\left(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-1}\right)\right) + i\pi \quad [2i\pi]$.

➢ **Troisième cas** : $\Delta < 0 \iff |\lambda| < 1$.

Alors l'équation (E2) possède exactement deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{2\lambda \pm 2i\sqrt{1-\lambda^2}}{2} \qquad \text{soit} \qquad \lambda \pm i\sqrt{1-\lambda^2}$$

En revenant à la variable initiale, on en déduit que :

$$e^z = \lambda \pm i\sqrt{1-\lambda^2}$$

Notons que : $\left|\lambda \pm i\sqrt{1-\lambda^2}\right| = 1$. Il s'ensuit que ces nombres complexes ne sont pas nuls.

Posons : $\theta = \arg\left(\lambda + i\sqrt{1-\lambda^2}\right) \ [2\pi]$. On a alors : $\arg\left(\lambda - i\sqrt{1-\lambda^2}\right) = -\theta \ [2\pi]$.

Avec ces notations :

$$\left[e^z = \lambda \pm i\sqrt{1-\lambda^2}\right] \iff \left[e^z = e^{\pm i\theta}\right] \iff \left[z = \pm i\theta \ [2i\pi]\ \right]$$

Conclusion. Soit λ un réel, et soit z un nombre complexe. On a :

$$\mathrm{CH}(z) = \lambda \iff \begin{cases} z = 0 \quad [2i\pi] \qquad \text{si } \lambda = 1 \\ z = i\pi \quad [2i\pi] \qquad \text{si } \lambda = -1 \\ z = \ln\left(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-1}\right) \quad [2i\pi] \qquad \text{si } \lambda > 1 \\ z = \ln\left(-\left(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-1}\right)\right) + i\pi \quad [2i\pi] \qquad \text{si } \lambda < -1 \\ z = \pm i\theta \ [2i\pi] \qquad \text{si } |\lambda| < 1, \text{ avec } \theta = \arg\left(\lambda + i\sqrt{1-\lambda^2}\right) \ [2\pi] \end{cases}$$

Exercice 7 — $\boxed{\textbf{(Sur la piste de } \cos(2\pi/7)\textbf{)}}$

On pose $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\pi/7}$, $\quad A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \quad$ et $\quad B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1/ Etablir que : $1 + A + B = 0$.

1/ On a : $1 + A + B = \displaystyle\sum_{k=0}^{6} \omega^k = \frac{1-\omega^7}{1-\omega}$ (car $\omega \neq 1$). Or : $\omega^7 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$. d'où : $\boxed{A + B = -1}$ (puisque $1 + A + B = \displaystyle\sum_{k=0}^{6} \omega^k$, et que la somme des racines septièmes de l'unité est nulle).

$\boxed{\textbf{Conclusion} : 1 + A + B = 0}$.

2/ Calculer AB.

On a : $AB = (\omega + \omega^2 + \omega^4)(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) = \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10}$

$$= \omega^4 + \omega^6 + 1 + \omega^5 + 1 + \omega + 1 + \omega^2 + \omega^3 = 2 + \underbrace{1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6}_{=0}$$

D'où : $\boxed{AB = 2}$.

3/ Etablir que : $\mathrm{Im}(A) > 0$.

Commençons par observer que : $\mathrm{Im}(A) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\dfrac{8\pi}{7}\right)$.

On note alors que : $\sin\left(\dfrac{8\pi}{7}\right) = -\sin\left(\dfrac{6\pi}{7}\right)$.[‖] Ainsi : $\sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\dfrac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\dfrac{6\pi}{7}\right)$. Or les réels $4\pi/7$ et $6\pi/7$ appartiennent tous deux à l'intervalle $[\pi/2, \pi]$, sur lequel la fonction sinus est strictement décroissante. On en déduit que : $\sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) > \sin\left(\dfrac{6\pi}{7}\right)$.

Par suite : $\sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\dfrac{6\pi}{7}\right) > 0$, d'où : $\sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\dfrac{8\pi}{7}\right) > 0$, et a fortiori : $\boxed{\mathrm{Im}(A) > 0}$.

‖. S'en convaincre par un dessin, et le prouver en notant que $\sin\left(\dfrac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{7}\right)$ tandis que $\sin\left(\dfrac{6\pi}{7}\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{7}\right)$.

4/ A l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs de A et B.

D'après les deux premières questions, les complexes A et B satisfont le système $\left\{\begin{array}{l} A+B=-1 \\ AB=2 \end{array}\right.$.

A ce titre, ils sont solutions de l'équation $X^2+X+2=0$. Or cette dernière équation possède évidemment deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{-1\pm \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$.

On déduit alors de la question 3 que : $\boxed{A=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2} \text{ et } B=\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}}$

__Conséquences__ : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\dfrac{8\pi}{7}\right)=-\dfrac{1}{2}$ *et* $\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\dfrac{8\pi}{7}\right)=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$