DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N^{0}3 — 1ER OCTOBRE 2022

- *La durée du devoir est de 3 heures, les calculatrices sont interdites.*
- *Le sujet est rédigé sur 3 pages, et est constitué de 7 exercices.*
- *Pensez à encadrer ou souligner les résultats à la fin de chaque question, et à accorder du soin à la présentation et à la rédaction.*

Barème indicatif : Ex1 : 12pts — Ex2 : 3pts — Ex3 : 7pts — Ex4 : 3pts — Ex5 : 3pts

Ex6 : 7pts — Ex7 : 7pts

EXERCICE 1 — (APPLICATIONS DIVERSES DU COURS).

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : [*]

$$\text{(E1)} \qquad 16X^4 - 20X^2 + 5 = 0$$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\text{(E2)} \qquad \cos(2x) + \sin(3x) = 0$$

3/ Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que : $|z+1| = |z| + 1$.

4/ Soit θ un réel. Linéariser $\sin^4(\theta)$.

5/ Soit $\alpha \in [0, 2\pi]$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\text{(E3)} \qquad \mathrm{e}^z = \sin(\alpha)$$

On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs de α.

6/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\text{(E4)} \qquad \cos^6(x) + \sin^6(x) = 1$$

$*$. Je vous indique, cela pourra peut-être vous servir, que : $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

Exercice 2 — **(Un exercice classique).**

Soit n un entier naturel. On note S_n la somme : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$.

Etablir que :

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\left(\frac{(2n+1)\,\pi}{6}\right)$$

Exercice 3 — **(Valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$).**

1/ **Délinéarisation**. Soit θ un nombre réel. Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

2/ On pose $\omega = \sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$. A l'aide de la question précédente, établir qu'il existe trois entiers a, b et c, que l'on explicitera, tels que :

$$a\,\omega^5 + b\,\omega^3 + c\,\omega = 0$$

3/ On considère à présent l'équation (E) : $aX^5 + bX^3 + cX = 0$.

a/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).

b/ On note X_1 et X_2 les deux solutions strictement positives de l'équation (E), de telle sorte que $X_1 < X_2$. Justifier que : $X_2 > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4/ Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 4 — **(Inégalité triangulaire généralisée).**

On admet l'inégalité triangulaire† : $\forall\,(z, z') \in \mathbb{C}^2,\ |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Démontrer l'énoncé suivant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \forall\ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

càd, moins rigoureusement mais un tout petit peu plus explicitement :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \forall\ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

†. Qui n'a donc pas à être redémontrée.

Exercice 5 — (Formules d'Euler généralisées)

On appelle **formules d'Euler généralisées** les formules ci-dessous valides pour tout couple de réels (α, β) :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)/2} \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)/2} \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

1/ Démontrer la formule d'Euler généralisée suivante :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)/2} \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

2/ Déterminer le module et un argument du nombre complexe :

$$Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/5} - \mathrm{i}$$

Exercice 6 — (Cosinus hyperbolique d'un nombre complexe)).

On définit une fonction sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, appelée **cosinus hyperbolique complexe** et notée CH, en posant :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{CH}\,(z) = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

1/ Montrer que la fonction CH est périodique, de période $2\mathrm{i}\pi$.

2/ Montrer que la fonction CH est paire.

3/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{CH}(z) = 0$.

4/ Soit λ un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{CH}(z) = \lambda$.

Exercice 7 — (Sur la piste de $\cos(2\pi/7)$)

On pose $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\pi/7}$, $\quad A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \quad$ et $\quad B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1/ Etablir que : $1 + A + B = 0$.

2/ Calculer AB.

3/ Etablir que : $\mathrm{Im}(A) > 0$.

4/ A l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs de A et B.

Exercice 8 — $\boxed{\textbf{(Have sum fun !)}}$

1/ Soit p un entier naturel quelconque. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{n} \binom{i+p}{i} = \binom{p+n+1}{n}$$

2/ Calculer $\displaystyle \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=1}^{n} (i+j) \right)$.

On présentera le résultat final comme le quotient de deux factorielles.