Développements limités d'ordre 1 en 0 et approximations affines de référence

Théorème : f est dérivable en a SSI il existe un réel ℓ et une fonction ε définie au voisinage de zéro tels que :

$$\forall h \in \mathbb{R},\ (a+h) \in I,\ f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Ainsi, lorsque f est dérivable en a, on a [1] :

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)}$$

1/ $\boxed{e^h = 1 + h + h\varepsilon(h)}$

2/ $\boxed{\sin(h) = h + h\varepsilon(h)}$

3/ $\boxed{\tan(h) = h + h\varepsilon(h)}$

4/ $\boxed{\mathrm{sh}(h) = h + h\varepsilon(h)}$

5/ $\boxed{\ln(1+h) = h + h\varepsilon(h)}$

6/ $\boxed{\cos(h) = 1 + h\varepsilon(h)}$

7/ $\boxed{\mathrm{ch}(h) = 1 + h\varepsilon(h)}$

8/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{(1+h)^n = 1 + nh + h\varepsilon(h)}$$

9/ Et même, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + h\varepsilon(h)}$$

10/ En particulier, pour $\alpha = 1/2$,

$$\boxed{\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} + h\varepsilon(h)}$$

11/ En particulier (bis), pour $\alpha = -1$,

$$\boxed{\frac{1}{1+h} = 1 - h + h\varepsilon(h)}$$

12/ $\boxed{\dfrac{1}{1-h} = 1 + h + h\varepsilon(h)}$

13/ $\boxed{\arccos(h) = \dfrac{\pi}{2} - h + h\varepsilon(h)}$

14/ $\boxed{\arcsin(h) = h + h\varepsilon(h)}$

15/ $\boxed{\arctan(h) = h + h\varepsilon(h)}$

➤**Conséquences**

1/ $\boxed{e^{1/n} = 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon(\dfrac{1}{n})}$

(avec $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$)

2/ $\boxed{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

3/ $\boxed{\tan\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

4/ $\boxed{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

5/ $\boxed{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} = 1 + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

6/ *Etc...*

1. Pour tout réel h “raisonnable”, c'est à dire tel que $(a+h)$ soit dans l'ensemble de définition de f.