COLLE 4 – QUESTIONS DE COURS ET COMPLÉMENTS

QUESTION DE COURS N°1 — **Exercice** : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{ch}(x) = 2$.

Soit x un nombre réel. On a :

$$\text{ch}(x) = 2 \iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \iff e^x + e^{-x} = 4 \iff e^x - 4 + e^{-x} = 0 \iff e^{2x} - 4e^x + 1 = 0 \qquad (\spadesuit)$$

Posons alors : $X = e^x$. L'équation se réécrit : $X^2 - 4X + 1 = 0$. C'est une équation du second degré, de discriminant $\Delta = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$. Elle possède donc exactement deux racines réelles :

$$\frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \qquad \text{càd} \qquad 2 \pm \sqrt{3}$$

Par suite :

$$\text{ch}(x) = 2 \iff e^x = 2 \pm \sqrt{3}$$

Après avoir observé que $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$ sont des réels strictement positifs, on peut conclure :

$$\boxed{\text{ch}(x) = 2 \iff x = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) \quad \text{ou} \quad x = \ln\left(2 - \sqrt{3}\right)}$$

QUESTION DE COURS N°2 — **Propriété** : soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$. Si f et g sont dérivables en a, alors (fg) est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Puisque f et g sont dérivables en a, elles admettent un DL1 en a. Pour tout réel h (tel que $(a+h) \in I$) on a donc :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h) \quad \text{et } g(a+h) = g(a) + hg'(a) + h\varepsilon_2(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = \lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$$

D'où pour tout h (tque $(a+h) \in I$) : $(fg)(a+h) = [f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h)] \times [g(a) + hg'(a) + h\varepsilon_2(h)]$

Ainsi : $(fg)(a+h) = f(a)g(a) + hf(a)g'(a) + hf(a)\varepsilon_2(h) + hf'(a)g(a) + h^2 f'(a)g'(a)$
$+h^2 f'(a)\varepsilon_2(h) + hg(a)\varepsilon_1(h) + h^2 g'(a)\varepsilon_1(h) + h^2\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h)$

D'où : $(fg)(a+h) = (fg)(a) + h\left(f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\right) + h\varepsilon_3(h) \qquad (\spadesuit)$

(en ayant posé : $\varepsilon_3(h) = f(a)\varepsilon_2(h) + hf'(a)g'(a) + hf'(a)\varepsilon_2(h) + g(a)\varepsilon_1(h) + hg'(a)\varepsilon_1(h) + h\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h)$)

Puisque qu'il est clair que $\lim_{h\to 0} \varepsilon_3(h) = 0$, on en déduit que la fonction (fg) admet un DL1 en a. A ce titre, elle est dérivable en a, et on déduit de $(\spadesuit)$ que : $\boxed{(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).}$

QUESTION DE COURS N°4 — **Exercice.** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \quad (\spadesuit)$.

Par ailleurs : $\forall h > -1,\ \ln(1+h) = h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$ *

En posant $h = 1/n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), le réel h tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, et il s'ensuit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\,\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

∗. C'est le développement limité (DL) à l'ordre 1 en 0 de $\ln(1+h)$, qui est un DL de référence. Vous pouvez donc l'écrire sans avoir à le démontrer. Je vous conseille néanmoins de savoir que c'est une application du théorème faisant l'objet de la question de cours 3.

D'où pour tout entier naturel n non nul : $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1+\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$.

Par suite : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$ $(\heartsuit)$. On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\heartsuit)$ que : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}}$.

Question de cours n^{0}3 — **Théorème** : f est dérivable en a SSI il existe un réel ℓ et une fonction ε définie au voisinage de zéro tels que :
$\forall\, h\in\mathbb{R},\ (a+h)\in I,\ f(a+h)=f(a)+\ell h+h\varepsilon(h)$ avec $\displaystyle\lim_{h\longrightarrow0}\varepsilon(h)=0$.

Càd : f est dérivable en a SSI f admet un **développement limité à l'ordre** 1 **au voisinage de** a.

On raisonne par double implication pour établir l'équivalence de l'énoncé.

➤ **Sens direct** : supposons que f soit dérivable en a.
On écrit, pour tout réel h (tel que $(a+h)\in I$) :

$$f\,(a+h)=f(a)+hf'(a)+f\,(a+h)-f(a)-hf'(a)\,^{\dagger}$$

D'où : $f\,(a+h)=f(a)+hf'(a)+h\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right)$ d'où : $\boxed{f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h\varepsilon(h)\ (\spadesuit)}$
en ayant posé : $\varepsilon(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)$.
Or, f étant dérivable en a, on a : $\displaystyle\lim_{h\longrightarrow0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$ et donc $\displaystyle\lim_{h\longrightarrow0}\varepsilon(h)=0$.
En résumé, on a établi l'implication :

$$\boxed{[f \text{ est dérivable en } a]\Longrightarrow\left[\forall\, h\in\mathbb{R},\ (a+h)\in I,\ f(a+h)=f(a)+\ell h+h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\longrightarrow0}\varepsilon(h)=0\right]\quad(\heartsuit)}$$

➤ **Réciproquement** : supposons qu'il existe un réel ℓ tel que f vérifie : $f(a+h)=f(a)+\ell h+h\varepsilon(h)$ avec $\displaystyle\lim_{h\longrightarrow0}\varepsilon(h)=0$.

Alors pour tout réel h non nul tel que $(a+h)\in I$, on a : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell+\varepsilon(h)$.
D'où : $\displaystyle\lim_{h\longrightarrow0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$. Ce qui signifie que la fonction f est dérivable en a (et que $f'(a)=\ell$). Ce qui assure que :

$$\boxed{\left[\forall\, h\in\mathbb{R},\ (a+h)\in I,\ f(a+h)=f(a)+\ell h+h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\longrightarrow0}\varepsilon(h)=0\right]\Longrightarrow[f \text{ est dérivable en } a]\quad(\clubsuit)}$$

Conclusion. f est dérivable en a SSI il existe un réel ℓ et une fonction ε définie au voisinage de zéro tels que :

$$\forall\, h\in\mathbb{R},\ (a+h)\in I,\ f(a+h)=f(a)+\ell h+h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\longrightarrow0}\varepsilon(h)=0.$$

†. Diabolique, n'est-ce pas ?

Question de cours n^{0}5 — **Exercice**. Soit f la fonction définie sur $I =]-1,+\infty[$ en posant : $\forall\, x > -1,\ f(x) = 1/(1-x)$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et : $\forall\, x \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$:"$\forall\, x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$", et raisonnons par récurrence sur n.

L'initialisation (vérification de $P(0)$) consiste à observer que f est continue (de classe $\mathscr{C}^0$) sur I, et à effectuer une vérification immédiate ; passons à l'hérédité.

Supposons que $P(n)$ soit vraie pour un certain entier naturel n. Alors : $\forall\, x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. En particulier $f^{(n)}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall\, x \in I, \quad f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = -\frac{-n!(n+1)\,(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

Ce qui assure que $P(n+1)$ est vraie, établit l'hérédité, achève cette récurrence et prouve la formule.

La démonstration ci-dessous n'est pas au programme de colle (mais l'énoncé est à connaître, naturellement).

Théorème (formule de Leibniz) : si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I (un intervalle de $\mathbb{R}$), alors (fg) l'est également et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad \text{ou} \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Prouvons le théorème par récurrence sur n.

Posons P(n) : "si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors fg l'est aussi et $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$".

➤**Initialisation** : soient f et g deux fonctions continues (c'est à dire de classe $\mathscr{C}^0$) sur I. Alors fg est continue sur I, et on a $(fg)^{(0)} = fg$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)} = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)} = fg$. D'où P$(0)$ est vraie.

➤**Hérédité** : on suppose P(n) vraie pour un certain entier naturel n. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Alors :

$$(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} = f^{(n+1)} g^{(0)} + \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right] + f^{(0)} g^{(n+1)}$$

D'où, en appliquant la relation de Pascal ‡ : $(fg)^{(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$

Cette relation assure que la propriété P$(n+1)$ est vraie, ce qui établit l'hérédité.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, et pour tout couple de fonctions (f,g) de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, fg est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et : $\quad (fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

‡. $\forall\,(n,k) \in \mathbb{N}^2,\ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$