Corrigé du Problème de la semaine 2

Exercice 1 — (Délinéarisation) Soient n un entier naturel, et θ un réel. Etablir que :

$$\sin^{2n+1}(\theta) = \left(\frac{-1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} \sin((2n-2k+1)\theta)$$

On a : $\sin^{2n+1}(\theta) = \left(\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^{2n+1} = \dfrac{1}{2^{2n+1} i^{2n+1}} \left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^{2n+1}$.

On peut observer que : $\dfrac{1}{i^{2n+1}} = \dfrac{1}{i^{2n} \times i} = \dfrac{1}{(-1)^n \times i} = \dfrac{(-1)^n}{i}$. Donc : $\sin^{2n+1}(\theta) = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1} i} \left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^{2n+1}$ $\quad(\spadesuit)$

D'après la formule du binôme de Newton :

$$\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \binom{2n+1}{k} e^{i(2n+1-k)\theta} e^{-ik\theta} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \binom{2n+1}{k} e^{i(2n-2k+1)\theta} \quad (\clubsuit)$$

On décompose cette somme en "deux morceaux" :

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} e^{i(2n-2k+1)\theta} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (-1)^k e^{i(2n-2k+1)\theta} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k e^{i(2n-2k+1)\theta}$$

On procède à un changement d'indice ($K = 2n+1-k$) pour obtenir :

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} e^{i(2n-2k+1)\theta} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (-1)^k e^{i(2n-2k+1)\theta} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (-1)^{2n+1-k} e^{-i(2n-2k+1)\theta}$$

Il reste à observer que $(-1)^{2n+1-k} = -(-1)^k$ pour obtenir :

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} e^{i(2n-2k+1)\theta} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (-1)^k \left[e^{i(2n-2k+1)\theta} - e^{-i(2n-2k+1)\theta}\right]$$

Par conséquent : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} e^{i(2n-2k+1)\theta} = 2i \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (-1)^k \sin((2n-2k+1)\theta)$ $\quad(\heartsuit)$

D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$, on a : $\boxed{\sin^{2n+1}(\theta) = \left(\dfrac{-1}{4}\right)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (-1)^k \sin((2n-2k+1)\theta)}$

Exercice 2 — (Délinéarisation) Soient n un entier naturel, et θ un réel. Etablir que :

$$\cos(2n\theta) = \sum_{p=0}^{n} \left[\binom{2n}{2p} (-1)^p \cos^{2(n-p)}(\theta) \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} (-1)^j \cos^{2j}(\theta) \right]$$

Soient n un entier naturel, et θ un réel. On a : $\cos(2n\theta) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2ni\theta}\right) = \mathrm{Re}\left[(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^{2n}\right] \quad (\spadesuit)$.

D'après la formule du binôme de Newton : $(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \mathrm{i}^k \sin^k(\theta) \cos^{2n-k}(\theta)$

On peut alors judicieusement observer que i^k est un réel si et seulement si k est pair pour affirmer que :

$$\mathrm{Re}\left[(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^{2n}\right] = \sum_{k=0,\, k \text{ pair}}^{2n} \binom{2n}{k} \mathrm{i}^k \sin^k(\theta) \cos^{2n-k}(\theta)$$

Par suite : $\mathrm{Re}\left[(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^{2n}\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \mathrm{i}^{2k} \sin^{2k}(\theta) \cos^{2(n-k)}(\theta)$

D'où : $\mathrm{Re}\left[(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^{2n}\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^k \cos^{2(n-k)}(\theta) \left(1 - \cos^2(\theta)\right)^k$

Une ultime application de la formule du binôme de Newton permet de conclure avec $(\spadesuit)$ que :

$$\boxed{\cos(2n\theta) = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{2n}{2k} (-1)^k \cos^{2(n-k)}(\theta) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \cos^{2j}(\theta) \right]}.$$

Exercice 3 — (Tangente) On rappelle que la fonction tangente (notée tan) est définie en posant : $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour tout réel $x \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

1/ Etablir que pour tout réel y, il existe un unique réel x tel que :

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad y = \tan(x)$$

Sur l'intervalle $]-\pi/2;\ \pi/2[$, on montre sans peine que la fonction tangente est strictement croissante, continue, et que ses limites aux bornes de l'intervalle sont $\pm\infty$. Une application du théorème des valeurs intermédiaires fournit alors la conclusion.

2/ Soient $x_1, \ldots, x_7$ sept nombres réels arbitraires.

Etablir qu'il existe deux entiers i et j dans $[\![1, 7]\!]$ tels que :

$$i \neq j \text{ et } 0 \leqslant \frac{x_j - x_i}{1 + x_i x_j} \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Soient $x_1, \ldots, x_7$ sept nombres réels.

Selon la question précédente, il existe 7 réels $\theta_1, \ldots, \theta_7$ dans l'intervalle $]-\pi/2;\ \pi/2[$ tels que : $x_k = \tan(\theta_k)$ (pour tout $k \in [\![1, 7]\!]$).

Partageons l'intervalle $I =]-\pi/2;\ \pi/2[$ en 6 intervalles $I_1, \ldots, I_6$ de même longueur (chacun des intervalles I_k est donc de longueur $\pi/6$).

Puisque 7>6… il existe deux entiers distincts i et j tels que θ_i et θ_j appartiennent au même intervalle de longueur $\pi/6$.

Puisqu'enfin on peut supposer que $\theta_i \leqslant \theta_j$ (qui à les renuméroter), on a :

$$0 \leqslant \theta_j - \theta_i \leqslant \frac{\pi}{6}$$

La fonction tangente étant croissante sur $[0;\ \pi/6]$, on en déduit que :

$$\tan(0) \leqslant \tan(\theta_j - \theta_i) \leqslant \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

D'où :

$$0 \leqslant \frac{\tan(\theta_j) - \tan(\theta_i)}{1 + \tan(\theta_i)\tan(\theta_j)} \frac{\sqrt{3}}{3}$$

D'où la conclusion en rappelant que $\tan(\theta_j) = x_j$ et $\tan(\theta_i) = x_i$.