Problème de la semaine 3

Exercice 1 — (Somme) Soit n un entier naturel. Etablir que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

Exercice 2 — (Développements limités et limites)

1/ Rappeler le développement limité à l'ordre 1 en 0 de $\ln(1+x)$.

2/ Déduire de la question précédente les limites :

$$\ell_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \qquad \text{et} \qquad \ell_2 = \lim_{n\to+\infty} n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

3/ Le but de cette question est de calculer : $\ell_3 = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

a/ Etablir que pour tout réel x positif ou nul, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

b/ En déduire qu'il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

c/ Déduire de ce qui précède que la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[n^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - n\right]$ est finie (càd est égale à un réel). Préciser sa valeur.

d/ Déduire de ce qui précède la valeur de ℓ_3.