Colle 5 – Questions de cours

Question de cours n^{0}1 — **Théorème** (racines carrées dans $\mathbb{C}$) : 0 ne possède qu'une racine carrée (0 lui-même). Et tout nombre complexe z non nul possède exactement deux racines carrées dans $\mathbb{C}$: $\pm|z|^{1/2}\,\mathrm{e}^{i\arg(z)/2}$

Soit z un nombre complexe non nul. La forme exponentielle de z est : $z=|z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $\theta=\arg(z)\ \ [2\pi]$.

Par définition, un nombre complexe ω est une racine carrée de z si $\omega^2=z$. Exploitons cette relation :

$$\omega^2=z\Longleftrightarrow\left(|\omega|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(\omega)}\right)^2=|z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Longleftrightarrow|\omega|^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\arg(\omega)}=|z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

Cette dernière égalité entre deux formes exponentielles entraîne l'égalité des modules, et des arguments (*modulo* 2π) de chaque terme, c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{rcl}|\omega|^2&=&|z|\\ 2\arg(\omega)&=&\theta\ \ [2\pi]\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}|\omega|&=&\sqrt{|z|}\\ \arg(\omega)&=&\dfrac{\theta}{2}\ \ [\pi]\end{array}\right.$$

On a ainsi établi que : $\boxed{(\omega\text{ est une racine carrée de }z)\Longleftrightarrow\left(|\omega|=\sqrt{|z|}\right)\wedge\left(\arg(\omega)=\dfrac{\theta}{2}\ \ [\pi]\right)}$.

Reste à préciser l'argument de ω :

$$\left(\arg(\omega)=\frac{\theta}{2}\ \ [\pi]\right)\Longleftrightarrow\left(\exists\,k\in\mathbb{Z},\ \arg(\omega)=\frac{\theta}{2}+k\pi\right)$$

D'où : $\omega=|z|^{1/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right)}=|z|^{1/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}=(-1)^k\,|z|^{1/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$
Ainsi $\omega=|z|^{1/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ (si k est pair) ou $\omega=-|z|^{1/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ (si k est impair).

En résumé : $\boxed{z\text{ possède exactement deux racines carrées dans }\mathbb{C}\text{, qui sont }\pm\sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}\ (\text{ou }\pm|z|^{1/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}})}$.

Question de cours n^{0}2 — **Théorème** (équations du second degré à coefficients complexes) : soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$, avec $a\neq0$. On note (E) l'équation $az^2+bz+c=0$, et $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant. Si $\Delta=0$, alors (E) possède une unique solution : $-b/2a$. Et si $\Delta\neq0$, alors (E) possède exactement deux solutions : $\dfrac{-b\pm\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée de Δ.

Soient a, b et c trois complexes, avec $a\neq0$. On a :

$$(E):\ az^2+bz+c=0\Longleftrightarrow a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)=0\Longleftrightarrow z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0\Longleftrightarrow\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\Longleftrightarrow\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\qquad(\spadesuit)$$

Posons $\Delta=b^2-4ac$, et distinguons deux cas :

➤ <u>Si $\Delta=0$</u> : alors on déduit de $(\spadesuit)$ que $\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$, donc que $z+\dfrac{b}{2a}=0$, d'où $z=-\dfrac{b}{2a}$.

➤ <u>Si $\Delta\neq0$</u> : alors Δ possède exactement deux racines carrées dans $\mathbb{C}$, que l'on note $\pm\delta$. On peut alors écrire :

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\Longleftrightarrow\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\Longleftrightarrow\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2=0$$

$$\Longleftrightarrow\left[z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right]\times\left[z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right]=0\Longleftrightarrow z=\frac{-b\pm\delta}{2a}$$

Ce qui prouve le théorème.

Question de cours n°3 — **Théorème (description des racines n-ièmes de l'unité)**. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On a : $\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \ / \ k \in [\![0; n-1]\!] \right\}$. *

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et soit z une racine n-ième de l'unité. Par définition, on a alors : $z^n = 1$. Cette condition impliquant la non-nullité de z, on peut écrire z sous forme exponentielle : $z = |z| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ (avec $\theta = \arg(z)$ $[2\pi]$).

Ceci posé : $[z^n = 1] \Longleftrightarrow |z|^n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = 1 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} |z|^n & = & 1 \\ n\theta & = & 0 \ [2\pi] \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} |z| & = & 1 \\ \theta & = & 0 \ [2\pi/n] \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z| = 1 \\ \exists \, k \in \mathbb{Z}, \ \theta = 2k\pi/n \end{array} \right.$

En résumé : $[z^n = 1] \Longleftrightarrow \left[\exists \, k \in \mathbb{Z}, \ z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n} \right]$. On a ainsi établi que : $\boxed{\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\} \ (\spadesuit)}$.

Reste à justifier que l'ensemble $\mathbb{U}_n$ est fini, et contient n éléments. Pour cela, on **admet** provisoirement † le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$:

Théorème (division euclidienne dans $\mathbb{Z}$**).** $\forall \, (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \ \exists! \, (q, r) \in \mathbb{Z}^2, \ \left\{ \begin{array}{l} a = bq + r \\ r \in [\![0, b-1]\!] \end{array} \right.$

Posons : $\boxed{E = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \ / \ k \in [\![0; n-1]\!] \right\} \ (\heartsuit)}$. Etablir le théorème, c'est établir l'égalité : $E = \mathbb{U}_n$. Pour ce faire, on peut procéder par double inclusion.

➤ Montrons $E \subset \mathbb{U}_n$. Il résulte clairement des descriptions respectives de E $(\heartsuit)$ et de $\mathbb{U}_n$ $(\spadesuit)$ que tout élément de E appartient à $\mathbb{U}_n$, ‡ donc $E \subset \mathbb{U}_n$.

➤ Montrons $\mathbb{U}_n \subset E$. Soit $z \in \mathbb{U}_n$. D'après $(\spadesuit)$, il existe un entier relatif k tel que : $z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$. On effectue alors la division euclidienne de k par n. D'après le théorème du même nom :

$$\exists! \, (q, r) \in \mathbb{Z}^2, \ \left\{ \begin{array}{l} k = nq + r \\ r \in [\![0, n-1]\!] \end{array} \right.$$

Ainsi : $z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{2i(nq+r)\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{2inq\pi}{n}} \times \mathrm{e}^{\frac{2ir\pi}{n}} = \underbrace{\left(\mathrm{e}^{\frac{2in\pi}{n}} \right)^q}_{=1} \times \mathrm{e}^{\frac{2ir\pi}{n}}$ d'où : $\boxed{z = \mathrm{e}^{\frac{2ir\pi}{n}}}$. Puisque $r \in [\![0, n-1]\!]$, cette dernière écriture signifie que $z \in E$. Ce qui prouve que $\mathbb{U}_n \subset E$.

D'après la règle de double inclusion, on peut affirmer que $E = \mathbb{U}_n$. Par suite : $\boxed{\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \ / \ k \in [\![0; n-1]\!] \right\}}$

Question de cours n°4 — **Exercice**. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(1 + \mathrm{i}z)^5 = (1 - \mathrm{i}z)^5$, en utilisant les racines 5-èmes de l'unité.

On peut supposer par la suite que $(1 - \mathrm{i}z) \neq 0$, càd que $z \neq -\mathrm{i}$, car $-\mathrm{i}$ n'est pas solution de (E) (c'est une vérification immédiate). D'où :

$$(1 + \mathrm{i}z)^5 = (1 - \mathrm{i}z)^5 \Longleftrightarrow \left(\frac{1 + \mathrm{i}z}{1 - \mathrm{i}z} \right)^5 = 1 \Longleftrightarrow \left(\frac{1 + \mathrm{i}z}{1 - \mathrm{i}z} \right) \in \mathbb{U}_5 \Longleftrightarrow \exists \, k \in [\![0; 4]\!], \ \frac{1 + \mathrm{i}z}{1 - \mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{2ik\pi/5}$$

Soit k un entier dans $[\![0; 4]\!]$. On a :

$$\frac{1 + \mathrm{i}z}{1 - \mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{2ik\pi/5} \Longleftrightarrow 1 + \mathrm{i}z = \mathrm{e}^{2ik\pi/5} (1 - \mathrm{i}z) \Longleftrightarrow iz \left(1 + \mathrm{e}^{2ik\pi/5} \right) = \mathrm{e}^{2ik\pi/5} - 1 \Longleftrightarrow iz = \frac{\mathrm{e}^{2ik\pi/5} - 1}{\mathrm{e}^{2ik\pi/5} + 1}$$

$$\Longleftrightarrow iz = \frac{\mathrm{e}^{ik\pi/5} \left(\mathrm{e}^{ik\pi/5} - \mathrm{e}^{-ik\pi/5} \right)}{\mathrm{e}^{ik\pi/5} \left(\mathrm{e}^{ik\pi/5} + \mathrm{e}^{-ik\pi/5} \right)} \Longleftrightarrow iz = \frac{2i \sin(k\pi/5)}{2 \cos(k\pi/5)} \Longleftrightarrow z = \tan(k\pi/5)$$

Conclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\left[(1 + \mathrm{i}z)^5 = (1 - \mathrm{i}z)^5 \right] \Longleftrightarrow [\exists \, k \in [\![0; 4]\!], \ z = \tan(k\pi/5)]$$

---

*. Ou encore : $\mathbb{U}_n = \left\{ \omega^k \ / \ k \in [\![0; n-1]\!] \right\}$ en ayant pris la précaution de noter $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.

†. En attendant le chapitre d'arithmétique, sans doute au printemps prochain.

‡. Ceci repose sur l'observation puissante que tout entier compris entre 0 et $n - 1$ est en particulier un entier relatif.

QUESTION DE COURS N^{0}5 — **Somme des racines n-èmes de l'unité**. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On a : $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=0$ soit encore $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}=0$ **Application** : valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a :

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}\right)^k=\frac{1-\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}}=\frac{1-1}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}}=0.\text{ Ainsi : }\boxed{\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=0}$$

D'après la propriété précédente, on a : $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_5}\omega=0$. Explicitement : $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/5}=0$. En particulier : $\mathrm{Re}(\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/5})=0$.

D'où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)=0$. D'où : $1+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=0$

On peut alors observer que : $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ (par une double application de la formule : $\cos(2\pi-\theta)=\cos(\theta)$).

Ainsi : $1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=0$.

Or, d'après la formule de duplication, on a : $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1$.

On a donc : $4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1=0$.

On en déduit que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation du second degré $4X^2+2X-1=0$, qui possède exactement deux solutions réelles : $X_{+,-}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Il reste à observer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est positif (puisque $2\pi/5$ est compris entre 0 et $\pi/2$) pour conclure que : $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}}$