MPSI – Colle 5 (17 au 21 octobre 2022) – Fonctions numériques / Complexes (suite et fin) : méthodes pratiques

Cette semaine, l'accent est mis sur les méthodes pratiques pour la résolution d'exercices de base sur le chapitre 5 (fonctions) et le chapitre 4-bis (fin des complexes).

Sur la forme, le plan de ce programme se distingue donc des précédents : au lieu de présenter linéairement les différentes notions du cours, on indique ci-dessous les questions standard relatives à chaque thème, illustrées par des exemples tous traités en cours ou en TD.

Chapitre 5 : Fonctions numériques

1/ **Parité**. Montrer qu'une fonction est paire ou impaire.

Exemple : montrer que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ est impaire.

2/ **Dérivabilité**. Montrer/Justifier qu'une fonction est dérivable (en un réel a ou sur un intervalle I) :

- en utilisant les théorèmes généraux ;
- ou en revenant à la définition (limite du taux d'accroissement)

Exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $f(x) = x^2/2$ si $x > 0$; $f(x) = -x^2/2$ si $x < 0$; et $f(0) = 0$.

Selon les théorèmes généraux f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On prouve que f est également dérivable en 0 en montrant que la limite quand h tend vers 0 de $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ existe et est finie.

3/ **Sens de variation**. Etudier le sens de variation d'une fonction dérivable, en déterminant le signe de sa dérivée. Ceci implique de connaître les dérivées usuelles, et les formule donnant la dérivée d'un produit, d'un quotient, d'une composée... (formulaire).

Exemple : étudier le sens de variation de $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^{1/x}$.

4/ **Développements limités**. Utiliser les DL1 usuels pour lever une indétermination dans un calcul de limite (en 0 ou en $+\infty$ principalement).

Exemples. Limites en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1+x}}{x} = -\dfrac{1}{2}$

Limites en $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} n\tan\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = 0$;

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

5/ **Dérivées n-èmes**. Calculer la dérivée n-ème d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$, en utilisant :

- les dérivées n-èmes usuelles et la linéarité.

  Exemple : $f(x) = 2\mathrm{e}^{\lambda x} + 3\cos(x) \Longrightarrow f^{(n)}(x) = 2\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda x} + 3\cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$
- la formule de Leibniz.

  Exemple : $f(x) = (2x-3)\mathrm{e}^{\lambda x} \Longrightarrow f^{(n)}(x) = (2x-3)\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda x} + 2n\lambda^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$
- un raisonnement par récurrence.

  Exemple : montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

Puissances et exponentielles de base a. Tout oublier pour se concentrer sur la formule :

$$\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$$

Appliquer cette formule à :

- l'étude d'une fonction : sens de variation de $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^{1/x}$.
- la résolution d'une équation.

  Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation : $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x}$.
- la résolution d'une inéquation.

  Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $a^{(x^2)} < \sqrt{a}^{\,7x-3}$ (en fonction du paramètre $a > 0$).

Chapitre 4-bis : Nombres complexes (suite et fin)

1/ **Racines carrées**. Déterminer les racines carrées d'un complexe non nul en utilisant :

— les formes exponentielles (méthode 1)

Exemple : les racines carrées de $(4-4\mathrm{i}) = 2^{5/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$ sont $\pm 2^{5/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/8}$.

— les formes algébriques (méthode 2)

Exemple : les racines carrées de $(8+6\mathrm{i})$ sont $\pm(3+\mathrm{i})$.

2/ **Racines n-èmes de l'unité**. Connaître les principales propriétés des racines n-èmes de l'unité, explicitement :

— la description : $\mathbb{U}_n = \left\{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n},\ k\in [\![0,n-1]\!]\right\}$

— la propriété : $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega = 0$

Exemple : $1+\cos(2\pi/5)+\cos(4\pi/5)+\cos(6\pi/5)+\cos(8\pi/5) = 0$. Valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$.

Questions de cours

➤ **Théorème** : tout nombre complexe z non nul possède exactement deux racines carrées dans $\mathbb{C}$: $\pm|z|^{1/2}\,\mathrm{e}^{i\arg(z)/2}$.

➤ **Théorème (équations du second degré à coefficients complexes)** : soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$, avec $a\neq 0$. On note (E) l'équation $az^2+bz+c=0$, et $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant. Si $\Delta = 0$, alors (E) possède une unique solution : $-b/2a$. Et si $\Delta\neq 0$, alors (E) possède exactement deux solutions : $\dfrac{-b\pm\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée dans $\mathbb{C}$ de Δ.

➤ **Théorème** : $\mathbb{U}_n = \left\{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\ /\ k\in[\![\,0;n-1\,]\!]\right\}$, ou $\mathbb{U}_n = \left\{w^k\ /\ k\in[\![\,0;n-1\,]\!]\right\}$ en ayant pris la précaution de noter $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.

➤ **Exercice**. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(1+\mathrm{i}z)^5 = (1-\mathrm{i}z)^5$, en utilisant les racines 5-èmes de l'unité.

➤ **Propriété**. La somme des racines n-èmes l'unité est nulle. Application : valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.