Corrigé du test sur les fonctions

1/ Soit n un entier naturel quelconque.

a/ Pour tout réel $x \in I =]-1,1[$, on pose : $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Déterminer l'expression de $f^{(n)}(x)$ pour tout réel x de I.

b/ Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on pose : $g(x) = (4x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$. Etablir que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-x} P_n(x)$$

où P_n est une fonction polynomiale que l'on explicitera.

Corrigé

1/ La fonction f est dérivable sur $I =]-1,1[$, et : $\forall\, x \in I,\ f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$.

La fonction f' est dérivable sur I, et : $\forall\, x \in I,\ f^{(2)}(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$.

La fonction $f^{(2)}$ est dérivable sur I, et : $\forall\, x \in I,\ f^{(3)}(x) = \dfrac{-6}{(1+x)^4}$.

Conjecture : la fonction f est indéfiniment dérivable sur I et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n\, n!}{(1+x)^{n+1}}$. [1]

Prouvons par récurrence sur l'entier naturel n que l'assertion

$$\mathrm{P}(n) : \text{“}f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I \text{ et } \forall\, x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(1+x)^{n+1}}\text{”}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'initialisation (pour $n = 0$) est immédiate. Passons à l'hérédité : supposons que $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n.

Sous cette hypothèse, la fonction f est donc n fois dérivable sur I et $\forall\, x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n\, n!}{(1+x)^{n+1}}$.

La fonction $f^{(n)}$ est donc dérivable sur I, et pour tout réel x de I on a :

$$\left[f^{(n)}\right]'(x) = -\frac{(-1)^n\, n!\,(n+1)\,(1+x)^n}{(1+x)^{2n+2}} = \frac{(-1)^n\ (n+1)!}{(1+x)^{n+2}}$$

On a ainsi établi que la fonction f est $(n+1)$ fois dérivable sur I, et que :

$$\forall\, x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\ (n+1)!}{(1+x)^{n+2}}$$

1. Cette partie justifiant la conjecture n'a pas à être rédigée sur votre copie ; je ne l'ai écrite que pour expliquer l'origine de la formule donnant la dérivée n-ème de f.

Ce qui assure que la propriété $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie, établit l'hérédité de la propriété, et achève donc cette récurrence.

Conclusion. La fonction $f : x \in I \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ est indéfiniment dérivable sur I (f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I), et : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n\, n!}{(1+x)^{n+1}}$

2/ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $g(x) = (4x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$. La fonction g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont. Pour tout entier naturel n, on peut donc calculer la dérivée n-ème de g grâce à la formule de Leibniz.

En posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = 4x+1 \wedge v(x) = \mathrm{e}^{-x}$, on a en effet : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = u(x)v(x)$.

Il s'ensuit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) \qquad (\spadesuit)$

Par ailleurs : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ v^{(n)}(x) = (-1)^n\,\mathrm{e}^{-x} \qquad (\clubsuit)$

Enfin, pour tout réel x on a : $u(x) = 4x+1\,;\quad u'(x) = 4\,;\quad$ et $\forall k \geqslant 2,\ u^{(k)}(x) = 0 \qquad (\heartsuit)$

On déduit de $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) = \binom{n}{0} u^{(0)}(x) v^{(n)}(x) + \binom{n}{1} u^{(1)}(x) v^{(n-1)}(x)$$
$$= (4x+1)\,(-1)^n \mathrm{e}^{-x} + 4(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-x} = (-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\,[-(4x+1)+4]$$

Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-x} \times \underbrace{(-1)^{n-1}\,(3-4x)}_{P_n(x)}}$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation

$$(I) : \qquad x^{3x^2+3x} \leqslant \sqrt{x}^{\,2x+2}$$

Corrigé

Soit x un réel strictement positif. On a :

$$\begin{aligned}
& x \text{ est solution de } (I) \\
\Longleftrightarrow\ & x^{3x^2+3x} \leqslant \sqrt{x}^{\,2x+2} \\
\Longleftrightarrow\ & \mathrm{e}^{\left(3x^2+3x\right)\ln(x)} \leqslant \mathrm{e}^{(2x+2)\ln\left(\sqrt{x}\right)} \\
\Longleftrightarrow\ & \mathrm{e}^{\left(3x^2+3x\right)\ln(x)} \leqslant \mathrm{e}^{(x+1)\ln(x)} \qquad \left(\text{car } \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)\right) \\
\Longleftrightarrow\ & (3x^2+3x)\ln(x) \leqslant (x+1)\ln(x) \qquad (\text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}_+^*) \\
\Longleftrightarrow\ & \underbrace{\left(3x^2+2x-1\right)\ln(x)}_{=\Pi(x)} \leqslant 0 \qquad (\spadesuit)
\end{aligned}$$

Le signe de $\ln(x)$ est connu (strictement positif sur $]\,1, +\infty\,[$, strictement négatif sur $]\,0, 1\,[$).

Celui de l'expression $3x^2 + 2x - 1$ s'obtient à l'aide de la méthode usuelle pour déterminer le signe d'un polynôme de degré 2. Explicitement, le polynôme $3X^2 + 2X - 1$ admet pour racine évidente -1. Sa seconde racine est donc $1/3$, le produit des racines étant égal à "c/a". La fonction polynomiale associée est donc strictement positive (*resp.* négative) sur $]-\infty, -1\,[\,\cup\,]\,1/3, +\infty\,[$ (*resp.* $]\,1/3, 1\,[$).

On en déduit le tableau de signes de l'expression $\Pi(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

x	0		$1/3$		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\|$		$-$		0	$+$	
$3x^2+2x-1$		$-$	0		$+$		
$\Pi(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion. On déduit de $(\spadesuit)$ et du tableau de signes ci-dessus que l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est le segment : $[1/3, 1]$.

3/ Soit β un réel. On pose, pour tout entier naturel non nul n : $u_n = 1 - \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}$.

a/ Pour tout réel $x > -1$, on pose : $f(x) = \sqrt{1+x}$. Rappeler la formule donnant le développement limité à l'ordre 1 en 0 de f.

b/ Déterminer en fonction de β la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\beta u_n$.

Corrigé

1/ $\boxed{\forall\, x > -1,\ \sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + x\varepsilon(x) \text{ avec } \lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0}$.

2/ D'après la question précédente : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} = 1 + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$.

Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$

D'où : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n^\beta u_n = n^{\beta - 1}\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$

Comme il est clair que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = -\dfrac{1}{2}$, on peut conclure :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} n^\beta u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta > 1 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } \beta = 1 \\ 0 & \text{si } \beta < 1 \end{cases}}$$

4/ On considère, pour tout n de $\mathbb{N}$ les fonctions :

$$f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!} \qquad \text{et} \qquad L_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^x f_n^{(n)}(x)$$

où $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f_n.

a/ Calculer, pour tout x de $\mathbb{R}$, $L_0(x), L_1(x)$ et $L_2(x)$.

b/ Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$$

Corrigé

1/ • $\forall\, x \in \mathbb{R},\ L_0(x) = \mathrm{e}^x \dfrac{x^0 \mathrm{e}^{-x}}{0!}$ soit : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ L_0(x) = 1}$.

• $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x} \Longrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R},\ f_1^{(1)}(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

D'où : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ L_1(x) = 1 - x}$.

• $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = \dfrac{1}{2} x^2 \mathrm{e}^{-x} \Longrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R},\ f_2^{(2)}(x) = \left(x^2 - 4x + 2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

D'où : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ L_2(x) = x^2 - 4x + 2}$.

2/ On applique la formule de Leibniz pour déterminer la dérivée n-ième de f_n. Ce faisant on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, f_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mathrm{e}^{-k}\right)^{(k)} \left(x^n\right)^{(n-k)} \qquad (\diamondsuit)$$

Or pour tout entier naturel $N \leqslant n$ on a : $\left(x^n\right)^{(N)} = \dfrac{n! x^{n-N}}{(n-N)!}$ [2] et $\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^{(N)} = (-1)^N \mathrm{e}^{-x}$. On applique ces deux formules en donnant respectivement à N les valeurs $n-k$ et k, et on injecte les résultats obtenus dans la relation $(\diamondsuit)$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, f_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathrm{e}^{-x} \frac{n! x^k}{(k)!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(k)!} x^k \mathrm{e}^{-x}$$

Il s'ensuit immédiatemment que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(k)!} x^k}$

2. Ce résultat n'avait pas à être justifié.

5/ (Technique) Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3}\right)^n$$

Corrigé (principales étapes)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $\left(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3}\right)^n = \left(3\times 2^{1/n}-2\times 3^{1/n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(3\times 2^{1/n}-2\times 3^{1/n}\right)\right)$.

Or : $2^{1/n} = \exp(\ln(2)/n) = 1 + \dfrac{\ln(2)}{n} + \dfrac{1}{n}\epsilon_1\left(\dfrac{1}{n}\right)$

De même : $3^{1/n} = \exp(\ln(3)/n) = 1 + \dfrac{\ln(3)}{n} + \dfrac{1}{n}\epsilon_2\left(\dfrac{1}{n}\right)$

D'où : $3\times 2^{1/n} - 2\times 3^{1/n} = 1 + 3\dfrac{\ln(2)}{n} - 2\dfrac{\ln(3)}{n} + \dfrac{1}{n}\epsilon_3\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Soit : $3\times 2^{1/n} - 2\times 3^{1/n} = 1 + \dfrac{\ln(8/9)}{n} + \dfrac{1}{n}\epsilon_3\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Donc : $\ln\left(3\times 2^{1/n} - 2\times 3^{1/n}\right) = \dfrac{\ln(8/9)}{n} + \dfrac{1}{n}\epsilon_3\left(\dfrac{1}{n}\right)$

D'où : $n\ln\left(3\times 2^{1/n} - 2\times 3^{1/n}\right) = \ln(8/9) + \epsilon_3\left(\dfrac{1}{n}\right)$

En particulier : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(3\times 2^{1/n} - 2\times 3^{1/n}\right) = \ln(8/9)$

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3}\right)^n = \dfrac{8}{9}$