Test sur les fonctions

1/ Soit n un entier naturel quelconque.

a/ Pour tout réel $x \in I =]-1,1[$, on pose : $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Déterminer l'expression de $f^{(n)}(x)$ pour tout réel x de I.

b/ Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on pose : $g(x) = (4x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$. Etablir que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-x} P_n(x)$$

où P_n est une fonction polynomiale que l'on explicitera.

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation

$$(I) : \qquad x^{3x^2+3x} \leqslant \sqrt{x}^{\;2x+2}$$

3/ Soit β un réel. On pose, pour tout entier naturel non nul n : $u_n = 1 - \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}$.

a/ Pour tout réel $x > -1$, on pose : $f(x) = \sqrt{1+x}$. Rappeler la formule donnant le développement limité à l'ordre 1 en 0 de f.

b/ Déterminer en fonction de β la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\beta u_n$.

4/ On considère, pour tout n de $\mathbb{N}$ les fonctions :

$$f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!} \qquad \text{et} \qquad L_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^x f_n^{(n)}(x)$$

où $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f_n.

a/ Calculer, pour tout x de $\mathbb{R}$, $L_0(x)\,, L_1(x)$ et $L_2(x)\,.$

b/ Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$$

5/ (Technique) Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n$$