DS2 du 5/10 : Physique-chimie (2h)

Solution de l'exercice 1 : Impédance d'entrée d'un oscilloscope

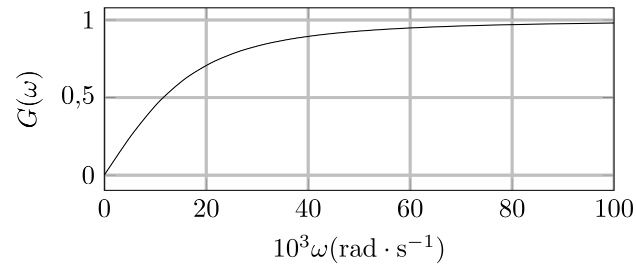
Q.1 On applique le pont diviseur de tension : $\underline{s} = \dfrac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}}\underline{e} = \dfrac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}\underline{e}$

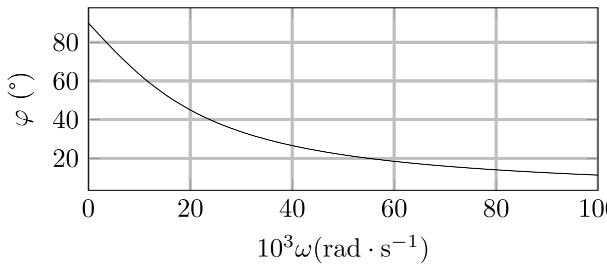
On obtient la fonction de transfert : $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \dfrac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$ on identifie $\tau = RC$ et $H_0 = 1$

Q.2 On cherche la pulsation de coupure tel que $G(\omega_c) = \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ avec $G(\omega) = |\underline{H}| = \dfrac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$

$$G_{\max} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{RC\omega_c}{\sqrt{1 + (RC\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Longrightarrow \omega_c = \frac{1}{RC} \qquad \underline{\text{AN : } \omega_c = 2 \times 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}}$$

Q.3 On trace $G(\omega) = |\underline{H}| = \dfrac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$ et $\varphi = \arg(\underline{H}) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega)$



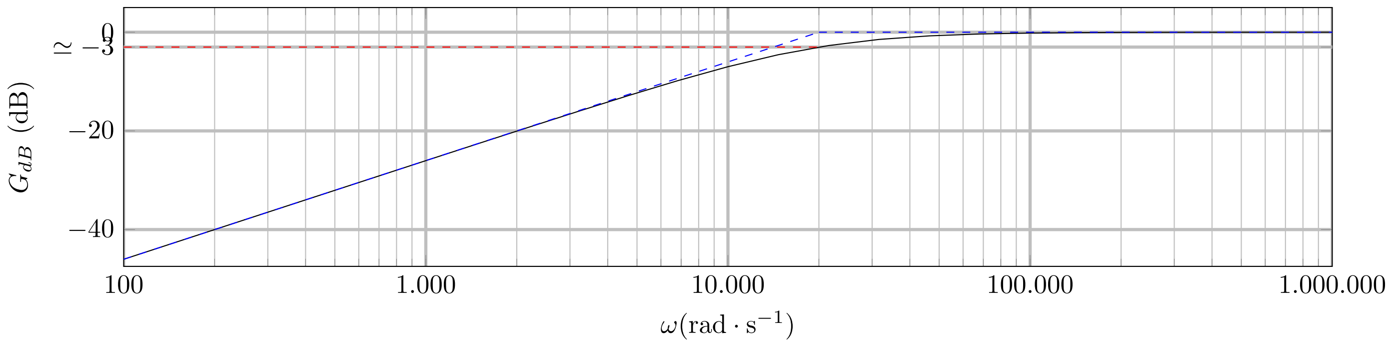


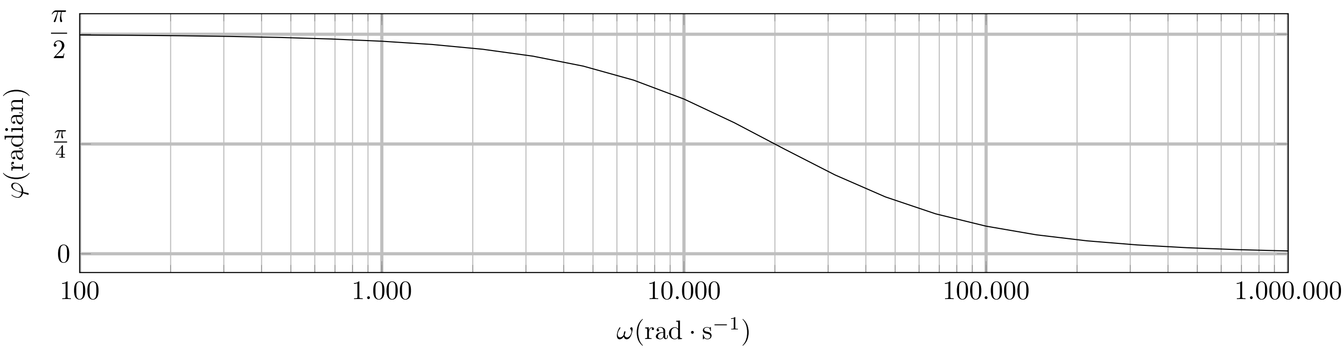
Q.4 On cherche les asymptotes en basses fréquences et hautes fréquences pour $G_{\mathrm{dB}} = 20\log(G(\omega))$ et φ.

En basses fréquences : $\omega \ll \omega_c \Longrightarrow \underline{H} \simeq jRC\omega$ soit $G_{\mathrm{dB}} \simeq 20\log(RC\omega)$ et $\varphi \simeq \dfrac{\pi}{2}$

En hautes fréquences : $\omega \gg \omega_c \Longrightarrow \underline{H} \simeq 1$ soit $G_{\mathrm{dB}} \simeq 0\,\mathrm{dB}$ et $\varphi \simeq 0$

à $\omega = \omega_c$: $\underline{H} = \dfrac{j}{1+j}$ soit $G_{\mathrm{dB}} = 20\log(1/\sqrt{2}) \simeq -3\,\mathrm{dB}$ et $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$





Q.5 On calcule l'impédance équivalente $\underline{Z}_{\mathrm{eq}}$: $\dfrac{1}{\underline{Z}_{\mathrm{eq}}} = \dfrac{1}{R} + jC_0\omega + \dfrac{1}{R_0}$

On applique le pont diviseur de tension : $\underline{s} = \dfrac{\underline{Z}_{\mathrm{eq}}}{\dfrac{1}{jC\omega} + \underline{Z}_{\mathrm{eq}}}\underline{e} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{jC\omega}\dfrac{1}{\underline{Z}_{\mathrm{eq}}}}$

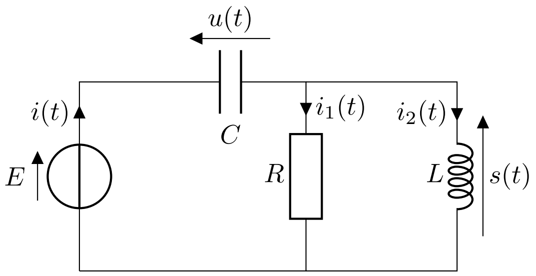
d'où $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{R+R_0}{jRR_0C\omega} + \dfrac{C_0}{C}} = \dfrac{j\dfrac{RR_0C\omega}{R+R_0}}{1 + \dfrac{jRR_0(C+C_0)\omega}{R+R_0}}$ on identifie $\tau' = \dfrac{RR_0(C+C_0)}{R+R_0}$ et $H_0' = \dfrac{C}{C+C_0}$

La nouvelle pulsation de coupure $\omega_c' = \dfrac{1}{\tau'}$ $\quad$ $\underline{\text{AN : } \omega_c' = 23 \times 10^4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$

L'oscilloscope augmente la pulsation de coupure et diminue le gain nominal. L'impédance d'entrée de l'osccilloscope n'est pas assez grande par rapport à l'impédance de sortie du filtre.

Solution de l'exercice 2 : Influence d'une bobine sur un circuit CR

Q.1 Soit le circuit :



Par continuité on a : $u(t=0^+) = 0$ et $i_2(t=0^+) = 0$ car le condensateur et la bobine sont déchargés.

Loi des mailles : $E = u(t=0^+) + Ri_1(t=0^+) \Longrightarrow i_1(t=0^+) = \dfrac{E}{R}$

Loi des nœuds : $i(t=0^+) = i_1(t=0^+) + i_2(t=0^+) \Longrightarrow \boxed{i(t=0^+) = \dfrac{E}{R}}$

Loi d'Ohm : $s(t=0^+) = Ri_1(t=0^+) \Longrightarrow \boxed{s(t=0^+) = E}$

Q.2 Loi des mailles : $E = u(t) + s(t)$ on dérive $0 = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ or $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ soit $\dfrac{i(t)}{C} + \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0$

Loi des nœuds : $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ soit $\dfrac{i_1(t)}{C} + \dfrac{i_2(t)}{C} + \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0$ or $i_1(t) = \dfrac{s(t)}{R}$

On dérive : $\dfrac{1}{RC}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = 0$ or $s(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{LC} = 0 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Q.3 Soit l'équation caractéristique : $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

Le discriminant : $\Delta = \omega_0^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right)$ or $\underline{\text{AN : } Q = 100}$ d'où $\Delta < 0$ on est en régime pseudo-périodique

$$s(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right) \qquad \text{avec } \omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

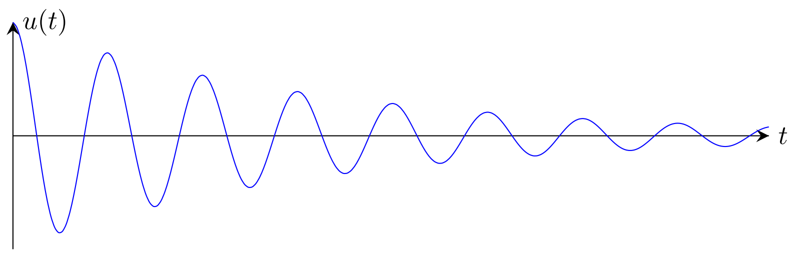
or $Q \gg 1$ d'où $\omega \simeq \omega_0$ et $s(0^+) = E$ soit $A = E$ et $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{i}{C}$ soit $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\dfrac{E}{RC} = -E\dfrac{\omega_0}{Q}$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega_0}{2Q}e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(E\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\right) + e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(-\omega_0 E\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)\right)$$

$$\Longrightarrow -\frac{\omega_0 E}{2Q} + \omega_0 B = -E\frac{\omega_0}{Q} \Longrightarrow B = -\frac{E}{2Q} \ll E$$

Soit $s(t) \simeq Ee^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t)$ avec $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$

Q.4 Soit la courbe en exagérant la décroissance :



Q.5 On sait que la durée du régime transitoire est d'environ $5\tau = \dfrac{10Q}{\omega_0} = \dfrac{10}{2\pi}QT_0$

On voit donc qu'en ordre de grandeur on aura $Q = 100$ oscillations !

Q.6 On applique la loi des mailles : $E = u + s$ et on multiplie par $i(t)$

$$Ei(t) = u(t)i(t) + s(t)i(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{P}_G(t) = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} + s(t)i_1(t) + s(t)i_2(t)$$

$$\mathscr{P}_G(t) = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} + \mathscr{P}_J + \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_L}{\mathrm{d}t}$$

avec $\mathscr{P}_G = Ei(t)$ la puissance délivrée par le générateur, $\mathscr{P}_J = Ri_1^2(t)$ la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance, $\mathscr{E}_C = \dfrac{1}{2}Cu^2(t)$ l'énergie stockée dans le condensateur et $\mathscr{E}_L = \dfrac{1}{2}Li_2^2$ l'énergie stockée dans la bobine.

On intègre entre 0 et $+\infty$:

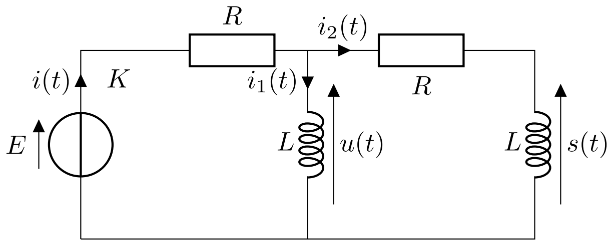
$$\mathscr{E}_G = \Delta\mathscr{E}_C + \mathscr{E}_J + \Delta\mathscr{E}_L$$

avec $\mathscr{E}_G = \displaystyle\int_0^{+\infty} EC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = EC(E-0) = CE^2$ et $\Delta\mathscr{E}_c = \dfrac{1}{2}CE^2$ et $\Delta\mathscr{E}_L = 0$ car $i_2(0^+) = 0$ et $i_{2\infty} = 0$

d'où : $\mathscr{E}_J = \dfrac{1}{2}CE^2$

Solution de l'exercice 3 : Mise en cascade de 2 cellules RL

Q.1 On considère le circuit suivant :



Par continuité on a $i_1(t=0^+) = 0$ et $i_2(t=0^+) = 0$ car les bobines sont déchargées.

La loi des nœuds : $i(t=0^+) = i_1(t=0^+) + i_2(t=0^+) = 0$

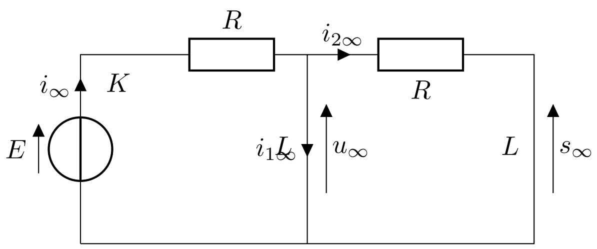
et la loi des mailles : $E = Ri(t=0^+) + Ri_2(t=0^+) + s(t=0^+)$ soit $\boxed{s(t=0^+) = E}$.

On applique la loi des mailles : $E = Ri + Ri_2 + s$ qu'on dérive : $0 = R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \Longleftrightarrow R\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + 2R\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0$

$\dfrac{R}{L}u + \dfrac{2R}{L}s + \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{R}{L}(E - Ri) + \dfrac{2R}{L}s + \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t=0^+) = -\dfrac{2R}{L}s(t=0^+) - \dfrac{R}{L}E + \dfrac{R^2}{L}i(t=0^+)$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t=0^+) = -3\frac{ER}{L}}$$

Q.2 En régime permanent on a le circuit équivalent :



On a alors $u_\infty = 0$ et $s_\infty = 0$. Loi des mailles : $u_\infty = Ri_{2\infty} + s_\infty \Longrightarrow \boxed{i_{2\infty} = 0}$.

Loi des mailles : $E = Ri_\infty + u_\infty \Longrightarrow i_\infty = \dfrac{E}{R}$ et la loi des nœuds : $i_\infty = i_{1\infty} + i_{2\infty} \Longrightarrow \boxed{i_{1\infty} = \dfrac{E}{R}}$

Q.3 Loi des mailles : $E = Ri(t) + Ri_2(t) + s(t) = Ri_1(t) + 2Ri_2(t)$ on dérive $0 = R\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + 2R\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

or $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u(t)}{L}$ et $\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{s(t)}{L}$: $\dfrac{R}{L}u(t) + \dfrac{2R}{L}s(t) + \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0$

Loi des mailles : $u(t) = Ri_2(t) + s(t) \Longrightarrow \dfrac{R^2}{L}i_2(t) + \dfrac{3R}{L}s(t) + \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0$ on derive $\dfrac{R^2}{L}\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \dfrac{3R}{L}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = 0$

$$\frac{R^2}{L^2}s(t) + \frac{3R}{L}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = 0 \qquad \omega_0 = \frac{R}{L} \qquad Q = \frac{1}{3}$$

Q.4 L'équation caractéristique : $r^2 + 3\omega_0 + \omega_0^2 = 0$ soit $\Delta = 9\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 5\omega_0^2 > 0$

$$r_{1,2} = -\frac{3\omega_0}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \qquad \Longleftrightarrow r_1 = -\frac{\omega_0}{2}(3+\sqrt{5}) \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{\omega_0}{2}(3-\sqrt{5})$$

soit $s(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ or $s(t = 0^+) = E \Longrightarrow B = E - A$
et $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = (Ar_1 e^{r_1 t} + (E - A)r_2 e^{r_2 t})$ or $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = -\dfrac{3ER}{L} = -3\omega_0 E$

$$\Longleftrightarrow A(r_1 - r_2) = -(3\omega_0 + r_2)E \Longrightarrow A = \frac{3\omega_0 + r_2}{r_2 - r_1}E = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}E$$

$$B = E\left(1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) = -E\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \qquad \Longrightarrow s(t) = \frac{E}{2\sqrt{5}}((1+\sqrt{5})e^{-\frac{\omega_0}{2}(3+\sqrt{5})t} - (3-\sqrt{5})e^{-\frac{\omega_0}{2}(3-\sqrt{5})t})$$

Q.5 Question annulée, problème du sujet.

$\cdots$ **FIN** $\cdots$