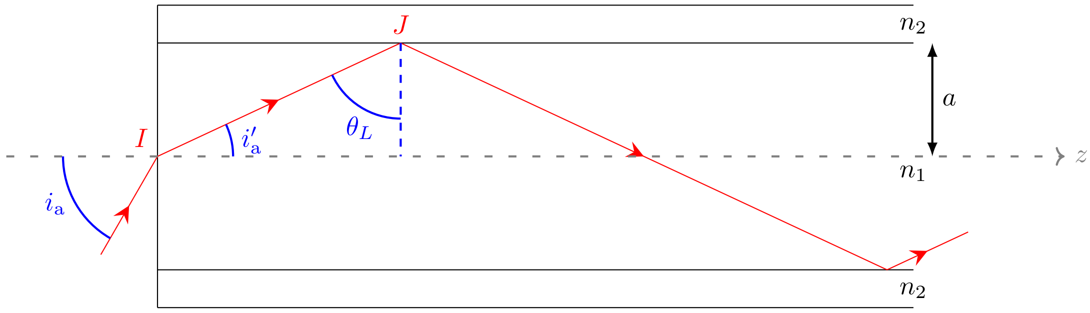
DS3 du 7/11 : Physique-chimie (2h)

Solution de l'exercice 1 : Fibre optique à saut d'indice

Q.1 Soit l'incidence en J, on veut que le rayon soit guidé dans le cœur donc on se place en condition de réflexion totale où $\theta > \theta_L$:



On applique la loi de Snell Descartes en J : $n_1 \sin(\theta_L) = n_2 \sin(\pi/2) \quad \Longrightarrow \sin(\theta_L) = \dfrac{n_2}{n_1}$ On applique la loi de Snell Descartes en I : $n_0 \sin(i_a) = n_1 \sin(i'_a)$

or $i'_a = \dfrac{\pi}{2} - \theta_L \quad \sin(i'_a) = \cos(\theta_L)$

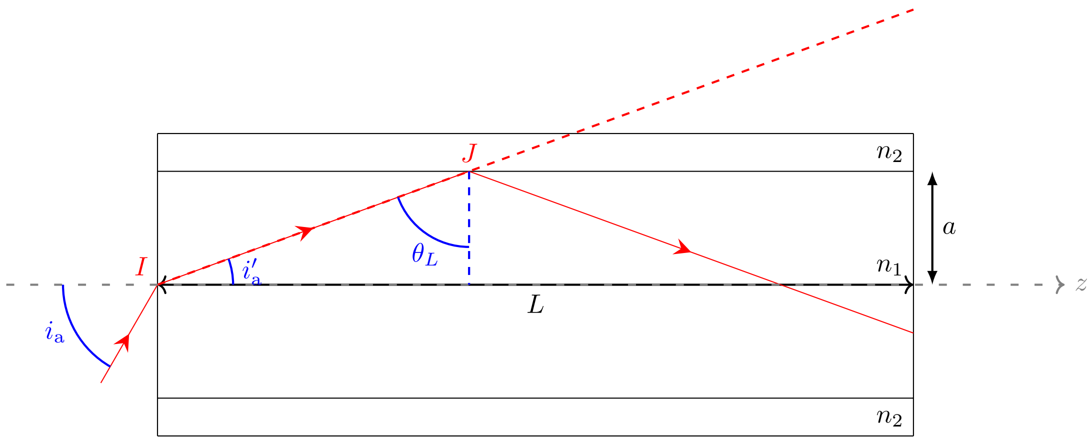
d'où $n_0 \sin(i_a) = n_1 \cos(\theta_L)$ or $\cos(\theta_L) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta_L)}$

$$\boxed{i_a = \arcsin\left(\frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0}\right)}$$

or $\theta > \theta_L$ pour que la réflexion totale soit possible, comme $i' = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ on a $i' < \dfrac{\pi}{2} - \theta_L$ soit $i < i_a$.

Q.2 Soit $ON = n_0 \sin i_{\max} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ AN : $\underline{N = 0{,}3631}$

Q.3 Soit $\delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ avec τ_1 la durée de propagation du rayon qui arrive avec une incidence normale et τ_2 la durée de propagation du rayon qui arrive avec une incidence i_a :

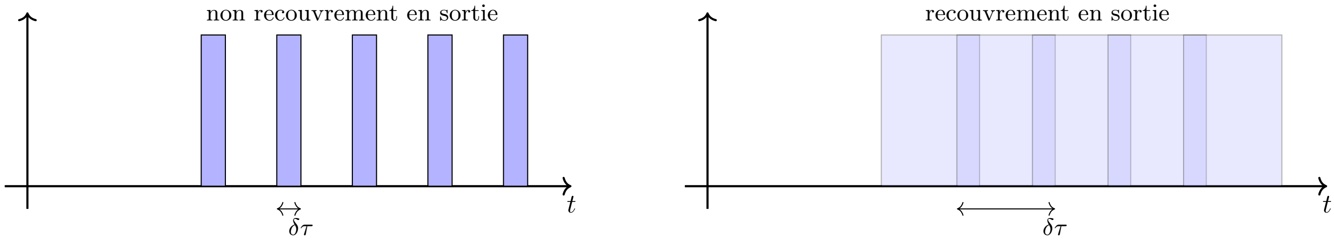


Soit $\tau_1 = \dfrac{L}{v_1} \Longrightarrow \boxed{\tau_1 = \dfrac{Ln_1}{c}}$

Soit $\tau_2 = \dfrac{d}{v_1} = \dfrac{dn_1}{c}$ avec $d = \dfrac{L}{\sin(\theta_L)} = \dfrac{Ln_1}{n_2} \Longrightarrow \boxed{\tau_2 = \dfrac{Ln_1^2}{cn_2}}$

Soit $\boxed{\delta\tau = \dfrac{Ln_1}{c}\left(\dfrac{n_1}{n_2} - 1\right)}$ $\qquad$ $\underline{\text{AN : } \delta\tau \simeq 1{,}58 \times 10^{-7}\ \text{s}}$

Q.4 On néglige T_1 la largeur de l'impulsion : chaque impulsion initiale s'étale pour donner un pavé de taille $\delta\tau$.



La valeur minimale de la période vaut Δt_m donc la fréquence à ne pas dépasser sous peine de mélange infâme est $BP_m = 1/\delta\tau = \dfrac{c}{n_1 L}\dfrac{n_2}{n_1 - n_2}$.
Pour $L = 1\,\text{km}$, $BP_m \simeq 6{,}3\,\text{MHz}$.

Solution de l'exercice 2 : Filtre d'un signal modulé

Q.1 Schéma électrique équivalent en BF :

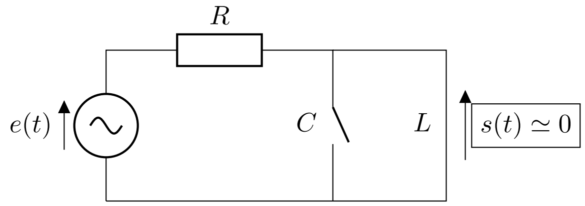
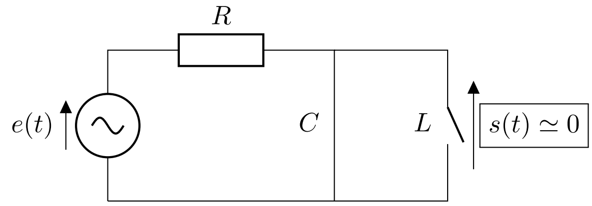


Schéma électrique équivalent en HF :



Conclusion : C'est un filtre passe-bande.

Q.2 On calcule : $\dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = jC\omega + \dfrac{1}{jL\omega}$.

Q.3 On applique le pont diviseur de tension : $\underline{s} = \dfrac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R}\underline{e}$ soit $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + R \times \frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}}}$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + R\left(j\omega C + \dfrac{1}{jL\omega}\right)} \Longleftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Q.4 On cherche à savoir s'il existe une valeur de $\omega = \omega_r \neq 0$ tel que $|\underline{H}|$ soit maximum. Pour ça on voit facilement que c'est le cas pour :

$$\frac{\omega_r}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_r} = 0 \Longrightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0}$$

Q.5 On en déduit que $|\underline{H}(\omega_r)| = 1$.

Q.6 Soit l'acuité de la résonance $\dfrac{\omega_r}{\Delta\omega}$ avec $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$ et $G(\omega_{1/2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$:

$$Q\left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1}\right) = +1$$

$$Q\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 - Q - \frac{\omega_1}{\omega_0} = 0$$

$$\Delta = 1 + 4Q^2 > 0 \Longrightarrow \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2Q} > 0$$

$$Q\left(\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2}\right) = -1$$

$$Q\left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2 - Q + \frac{\omega_2}{\omega_0} = 0$$

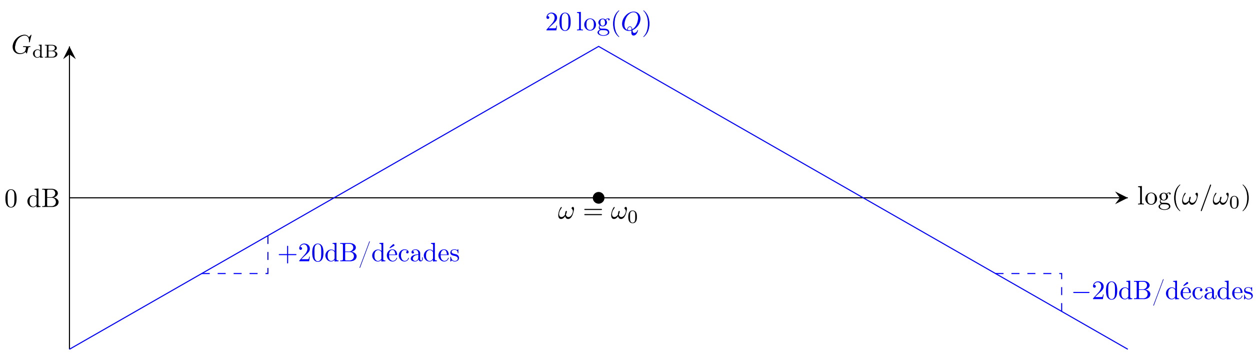
$$\Delta = 1 + 4Q^2 > 0 \Longrightarrow \frac{\omega_2}{\omega_0} = -\frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2Q} > 0$$

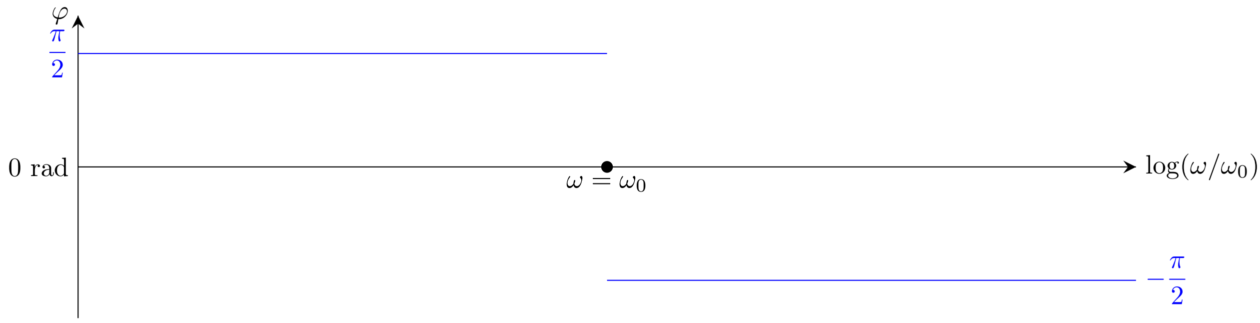
On garde pour chaque équation la racine positive d'où $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = \dfrac{1}{Q}$ soit $\boxed{\dfrac{\omega_r}{\Delta\omega} = Q}$

Q.7 En BF ($\omega \ll \omega_0$) : $\underline{H} \simeq \dfrac{1}{-jQ\dfrac{\omega_0}{\omega}}$ donc $\varphi = \arg \underline{H} \simeq \dfrac{\pi}{2}$. et $G_{\text{dB}} = 20\log(|\underline{H}|) \simeq 20\log(\omega/\omega_0) - 20\log(Q)$

En HF ($\omega \gg \omega_0$) : $\underline{H} \simeq \dfrac{1}{+jQ\dfrac{\omega}{\omega_0}}$ donc $\varphi = \arg \underline{H} \simeq -\dfrac{\pi}{2}$. et $G_{\text{dB}} = 20\log(|\underline{H}|) \simeq -20\log(\omega/\omega_0) - 20\log(Q)$

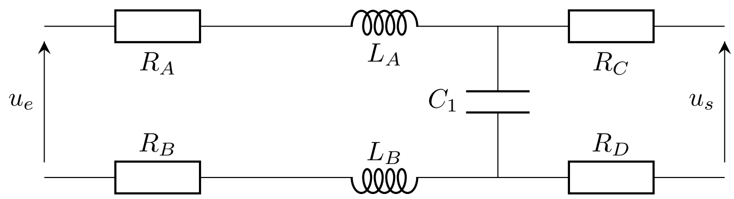
Q.8 On trace le diagramme de Bode :





Solution de l'exercice 3 : L'internet par ADSL

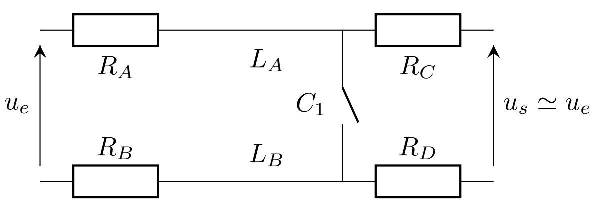
Q.1 On rappelle le schéma simplifié du filtre en notant r_i les résistances internes des bobines d'inductance L_i :



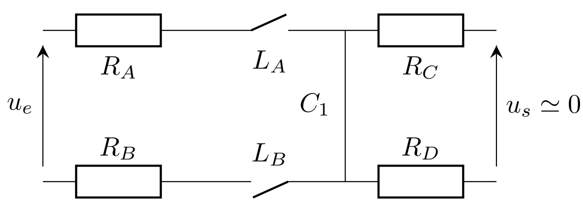
$L_A = L_4 + L_6 + L_2 = 10{,}25\,\mathrm{mH}$
$L_B = L_3 + L_5 + L_1 = 10{,}25\,\mathrm{mH}$
$C_1 = 22\,\mathrm{nF}$; $R_D = R_1 = R_C = R_2 = 22\,\Omega$
$R_B = r_3 + r_5 + r_1 = 23\,\Omega$
$R_A = r_4 + r_6 + r_2 = 23\,\Omega$

Q.2 On trace les circuits équivalents :

- En basse fréquence :



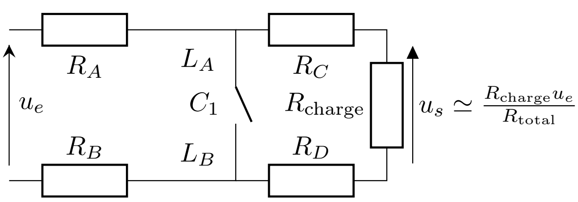
- En haute fréquence :



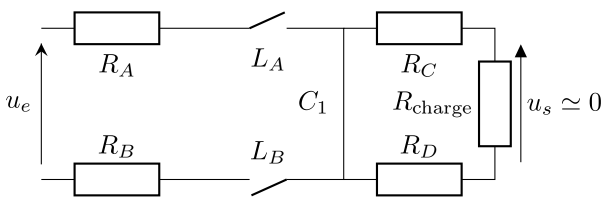
Le filtre agit comme un filtre passe-bas.

Si on ajoute un résistance de charge :

- En basse fréquence :



- En haute fréquence :



Le comportement n'est pas modifié en ajoutant le téléphone.

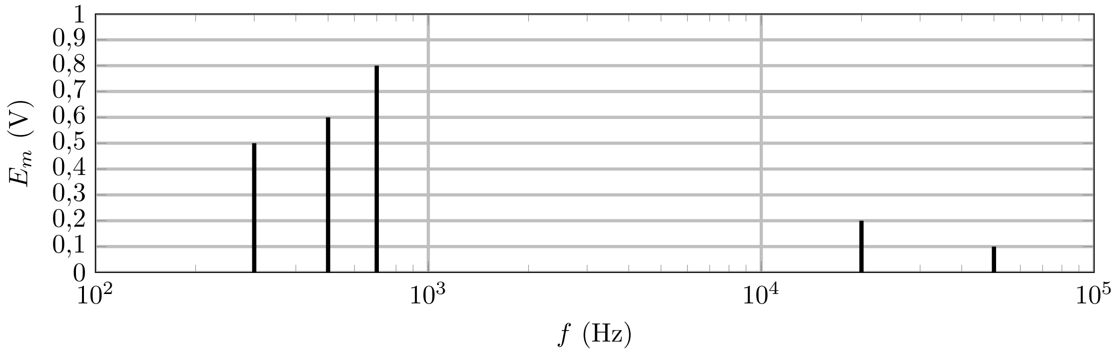
Q.3 Le diagramme de Bode confirme le comportement passe-bas avec l'affaiblissement $a_{\mathrm{dB}} = -G_{\mathrm{dB}} = -20\log(|\underline{H}|)$

- L'affaiblissement est nul aux basses fréquences ;
- L'affaiblissement augmente avec une pente de $+40\,\mathrm{dB/décade}$

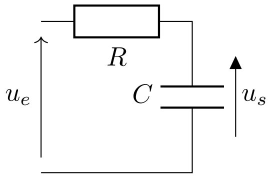
Q.4 Graphiquement la fréquence de coupure est obtenue en faisant l'intersection des asymptotes basses fréquences et hautes fréquences : $\underline{f_c = 10\,000\,\mathrm{Hz}}$

Q.5 La fréquence de coupure $f_c = 10\,\mathrm{kHz}$ permet de ne garder que les composantes de fréquences $f_1 = 300\,\mathrm{Hz}$, $f_2 = 500\,\mathrm{Hz}$, et $f_3 = 700\,\mathrm{Hz}$ qui correspondent aux fréquences audibles. Les fréquences éliminées sont $f_4 = 20\,\mathrm{kHz}$ et $f_5 = 50\,\mathrm{kHz}$ qui correspondent à des fréquences non-audibles.

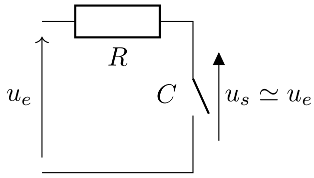
Q.6 Les harmoniques de fréquences f_1, f_2 et f_3 voient leurs amplitudes inchangées en sortie. Au contraire, les harmoniques de fréquences f_4 et f_5 voient leurs amplitudes fortement atténuées telle que :



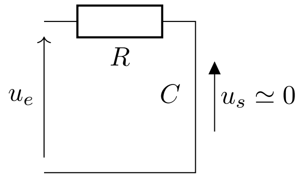
Q.7 Soit le circuit RC série :



D'équivalent en basse fréquence :



D'équivalent en haute fréquence :



On retrouve donc bien le comportement passe-bas.

On applique le pont diviseur de tension aux tensions complexes : $\underline{u_s} = \dfrac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_c} + R}\underline{u_e}$

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{\underline{Z_C}}} \Longrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}}$$

On calcul la fréquence de coupure d'après la définition : $G(\omega_c) = \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ avec $G_{\max} = 1$ et $G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega_c)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}} \Longrightarrow \omega_c = \frac{1}{RC} \longrightarrow \boxed{R = \frac{1}{2\pi f_c C}} \qquad \text{AN :}\underline{R = 16\,\mathrm{k\Omega}}$$

Q.8 Pour un filtre passe-bas du premier ordre on a en haute fréquence avec $x = RC\omega$: $\underline{H} \simeq \dfrac{1}{jx} \Longrightarrow G_{\mathrm{dB}} \simeq -20\log(x)$

La pente de $-40\,\mathrm{dB}$/décade est plus efficace pour atténuer les hautes fréquences que celle du filtre RC d'ordre 1.

· · · FIN · · ·