DS3 du 14/10 : Physique-chimie (2h)

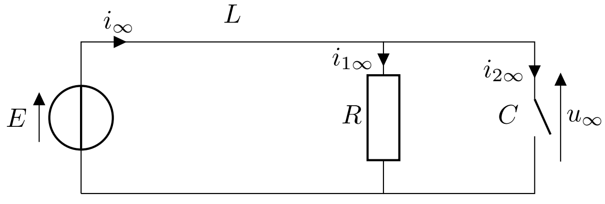
Solution de l'exercice 1 : Étude d'un circuit RLC

Q.1 Les conditions initiales imposent : $\boxed{u(0) = 0}$ et $\boxed{i(0) = 0}$ car le condensateur et la bobine sont déchargés.

Loi des mailles : $Ri_1(0) = u(0) \Longrightarrow \boxed{i_1(0) = 0}$

Loi des nœuds : $i_1(0) + i_2(0) = i(0) \Longrightarrow \boxed{i_2(0) = 0}$

Q.2 On trace le circuit équivalent en régime permanent :



Par définition : $\boxed{i_{2\infty} = 0}$, et $\boxed{u_{L\infty} = 0}$.

Loi des mailles : $E = 0 + \cancel{u_{L\infty}} \Longrightarrow u_\infty = E$

Loi des nœuds : $i_\infty = i_{1\infty} + \cancel{i_{2\infty}}$

Loi des mailles : $u_\infty = Ri_{1\infty} \Longrightarrow \boxed{i_{1\infty} = \frac{E}{R}}$

Q.3 On applique la loi des mailles :

$$E = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u(t) \quad \text{or } i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

$$E = L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + u(t) \quad \text{or } i_1(t) = \frac{u(t)}{R}$$

$$E = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + u(t) \quad \text{or } i_2(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$E = \frac{L}{RC}i_2(t) + L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + u(t)$$

$$0 = \frac{L}{RC}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$0 = \frac{L}{RC}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{i_2(t)}{C}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{i_2}{LC} = 0}$$

Q.4 On met l'équation différentielle sous forme canonique : $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i_2 = 0}$

On identifie donc : $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$.

Q.5 On fait l'application numérique de $Q = \frac{1}{10}$ puis cherche les racines de l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \Longrightarrow \Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) > 0$$

on est en régime apériodique et on a : $r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$.

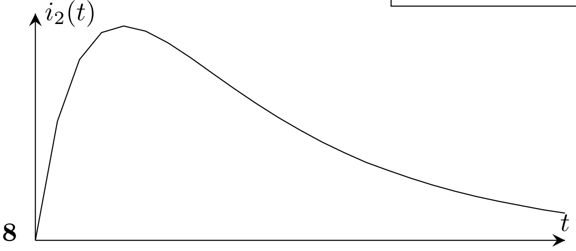
Q.6 On reprend la loi des mailles précédente : $E = \frac{L}{RC}i_2(t) + L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + u(t)$

Q.7 On a alors $i_2(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(A\mathrm{ch}\left(\Omega t\right) + B\mathrm{sh}\left(\Omega t\right)\right)$ avec $\Omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$

On a $i_2(0) = 0 \Longrightarrow A = 0$ et $\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{E}{L}$ or $\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega_0}{2Q}Be^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\mathrm{sh}\left(\Omega t\right) + B\Omega e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\mathrm{ch}\left(\Omega t\right)$

Soit $B\Omega = \frac{E}{L} \Longleftrightarrow B = \frac{E}{L\Omega}$ donc $\boxed{i_2(t) = \frac{E}{L\Omega}e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\mathrm{sh}\left(\Omega t\right)}$

Q.8



$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}(t_M) = 0 \Longleftrightarrow -\frac{\omega_0}{2Q}\mathrm{sh}\left(\Omega t_M\right) + \Omega\mathrm{ch}\left(\Omega t\right) = 0$$

$$\frac{\mathrm{sh}\left(\Omega t_M\right)}{\mathrm{ch}\left(\Omega t_M\right)} = \frac{\Omega 2Q}{\omega_0} \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{sh}\left(\Omega t_M\right)}{\mathrm{ch}\left(\Omega t_M\right)} = \sqrt{1 - 4Q^2}$$

$$\Omega t_M = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4Q^2}}{1 - \sqrt{1 - 4Q^2}}\right)$$

$$\boxed{t_M = \frac{1}{2\Omega}\ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4Q^2}}{1 - \sqrt{1 - 4Q^2}}\right)}$$

Q.9 On applique la loi des mailles au circuit : $E = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u$ puis on multiplie par $i(t)$

$$Ei(t) = i(t)L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u(t)i(t)$$

$$Ei(t) = i(t)L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u(t)i_1(t) + u(t)i_2(t)$$

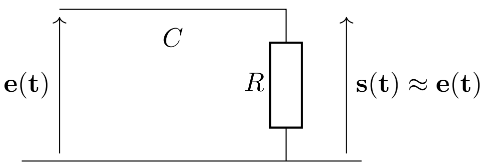
$$\mathscr{P}_G = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_L}{\mathrm{d}t} + Ri_1^2(t) + \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_C}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathscr{P}_G = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_L}{\mathrm{d}t} + \mathscr{P}_J + \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_C}{\mathrm{d}t}$$

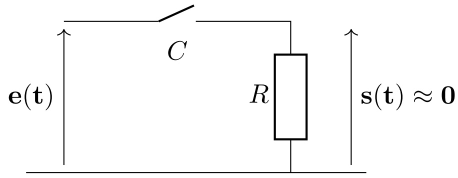
Solution de l'exercice 2 : Étude d'un filtre d'ordre 1

Q.1 On fait l'étude des circuits équivalents en haute et basse fréquences :

- HF :



- BF :

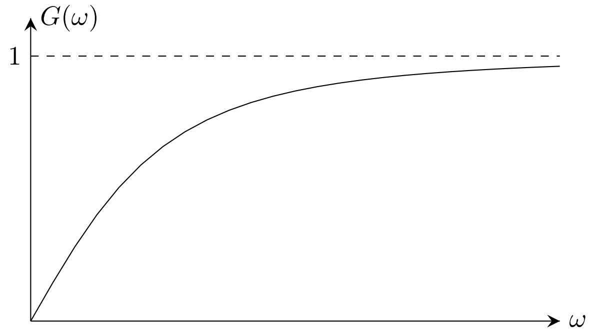


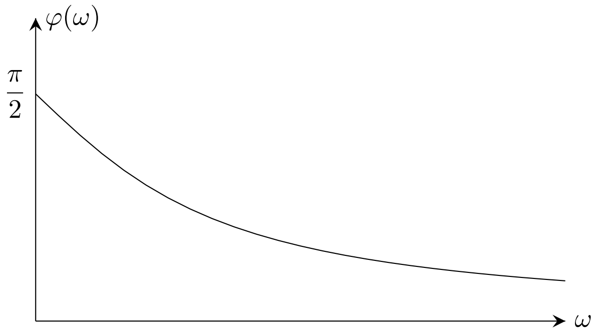
On en déduit que le filtre est un filtre passe haut.

Q.2 On applique le pont diviseur de tension pour calculer $\underline{s}$: $\underline{s} = \dfrac{\underline{Z}_R \underline{e}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \dfrac{\dfrac{\underline{e}}{jC\omega}}{R + \dfrac{1}{jC\omega}} = \dfrac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}\underline{e}$

on obtient $\boxed{\underline{H} = \dfrac{\underline{e}}{\underline{s}} = \dfrac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}}$. Avec $\boxed{\tau = RC}$ et $\boxed{H_0 = 1}$.

Q.3 Par définition : $G(\omega) = |\underline{H}|$ et $\varphi = \arg(\underline{H})$ soit $\boxed{G(\omega) = \dfrac{(\tau\omega)}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}}$ $\boxed{\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(\tau\omega)}$





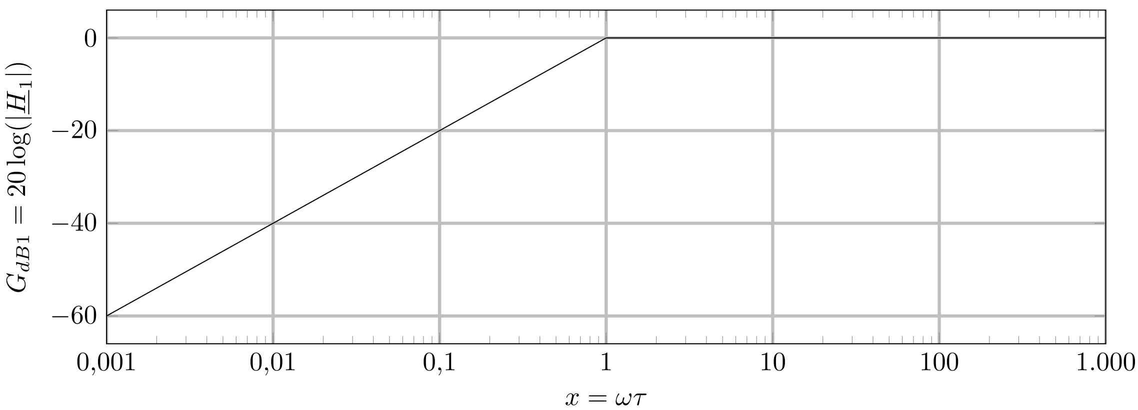
Q.4 Par définition : $G(\omega_c) = \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ or $G_{\max} = 1$ soit $\boxed{\omega_c = \dfrac{1}{\tau}}$

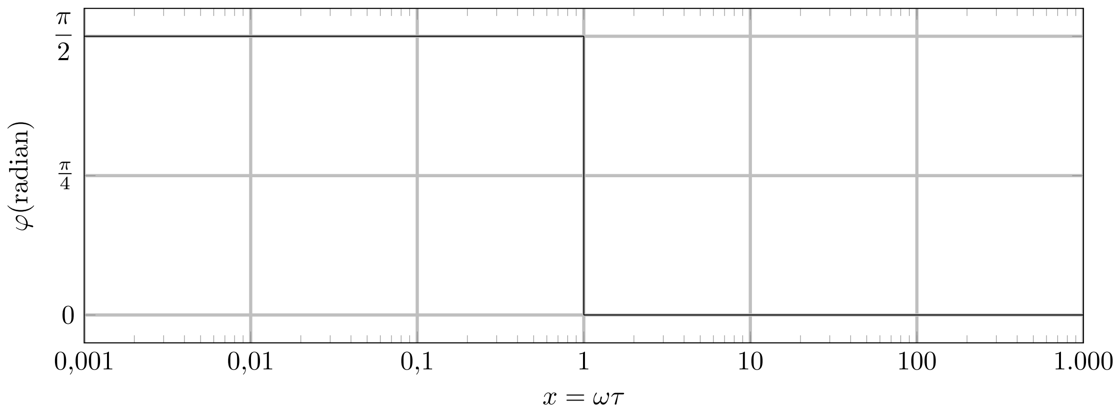
Q.5 Par définition, le gain en décibel est donné par : $\boxed{G_{\mathrm{dB}} = 20\log(|\underline{H}|) = 20\log(RC\omega) - 10\log(1 + (RC\omega)^2)}$

Pour $\omega = \omega_c$ on a : $G_{\mathrm{dB}}(\omega_c) = -10\log(2) \approx -3\,\mathrm{dB}$ $\varphi(\omega_c) = +\dfrac{\pi}{4}$.

Q.6 On cherche les équations des asymptotes :

- En HF : $\omega \gg \omega_c$ alors $G_{\mathrm{dB}} \approx +20\log(\omega\tau)$ et $\varphi \approx \dfrac{\pi}{2}$;
- En BF : $\omega \ll \omega_c$ alors $G_{\mathrm{dB}} \approx 0$ et $\varphi \approx 0$;





Q.7 On décompose le signal $e(t)$ en une somme de signaux sinusoïdaux :

$$e(t) = E\cos^2(\omega_0 t) = E\frac{1+\cos(2\omega_0 t}{2} = e_1(t) + e_2(t)$$

avec $e_1(t) = \dfrac{E}{2}$ de pulsation $\omega = 0$ et $e_2(t) = \dfrac{E}{2}\cos(2\omega_0 t)$ de pulsation $\omega = 2\omega_0$.

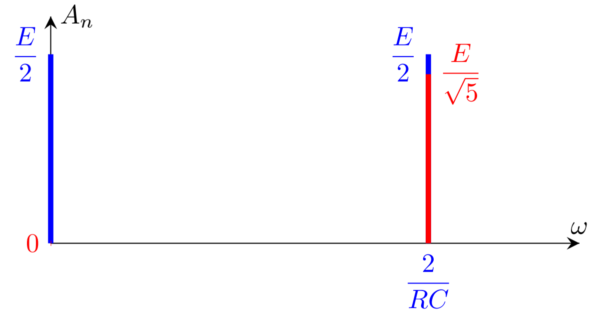
On cherche maintenant $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ tel que $s_1(t) = \mathscr{R}e\left(\underline{H}(0)\dfrac{E}{2}\right)$ et $s_2(t) = \mathscr{R}e\left(\underline{H}(2\omega_0)\dfrac{E}{2}e^{j2\omega_0 t}\right)$

or $\underline{H}(0) = 0$ donc $s_1(t) = 0$ et $\underline{H}(2\omega_0) = \dfrac{j2\omega_0\tau}{1+j2\omega_0\tau} = \dfrac{2j}{1+2j}$ d'où

$$s(t) = s_2(t) = \frac{E}{2}\left|\frac{2j}{1+2j}\right|\cos\left(2\omega_0 t + \arg\left(\frac{2j}{1+2j}\right)\right)$$

$$s(t) = \frac{E}{2}\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{2} - \arctan(2)\right)$$

$$\boxed{s(t) = \frac{E}{\sqrt{5}}\cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{2} - \arctan(2)\right)}$$



Solution de l'exercice 3 : Filtre d'un signal modulé

Q.1 Schéma électrique équivalent en BF :

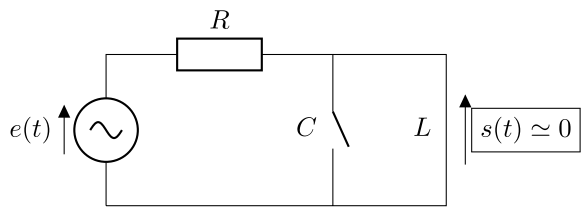
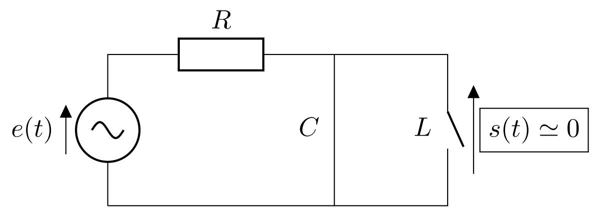


Schéma électrique équivalent en HF :



Conclusion : C'est un filtre passe-bande.

Q.2 On calcule : $\dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = jC\omega + \dfrac{1}{jL\omega}$.

Q.3 On applique le pont diviseur de tension : $\underline{s} = \dfrac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R}\underline{e}$ soit $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + R\times\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}}}$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + R\left(jwC + \dfrac{1}{jL\omega}\right)} \Longleftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Q.4 On cherche à savoir s'il existe une valeur de $\omega = \omega_r \neq 0$ tel que $|\underline{H}|$ soit maximum. Pour ça on voit facilement c'est le cas pour :

$$\frac{\omega_r}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_r} = 0 \Longrightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0}$$

Q.5 On en déduit que $|\underline{H}(\omega_r)| = 1$.

Q.6 Soit l'acuité de la résonance $\dfrac{\omega_r}{\Delta\omega}$ avec $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$ et $G(\omega_{1/2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$:

$$Q\left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1}\right) = +1$$

$$Q\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 - Q - \frac{\omega_1}{\omega_0} = 0$$

$$\Delta = 1 + 4Q^2 > 0 \Longrightarrow \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2Q} > 0$$

$$Q\left(\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2}\right) = -1$$

$$Q\left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2 - Q + \frac{\omega_2}{\omega_0} = 0$$

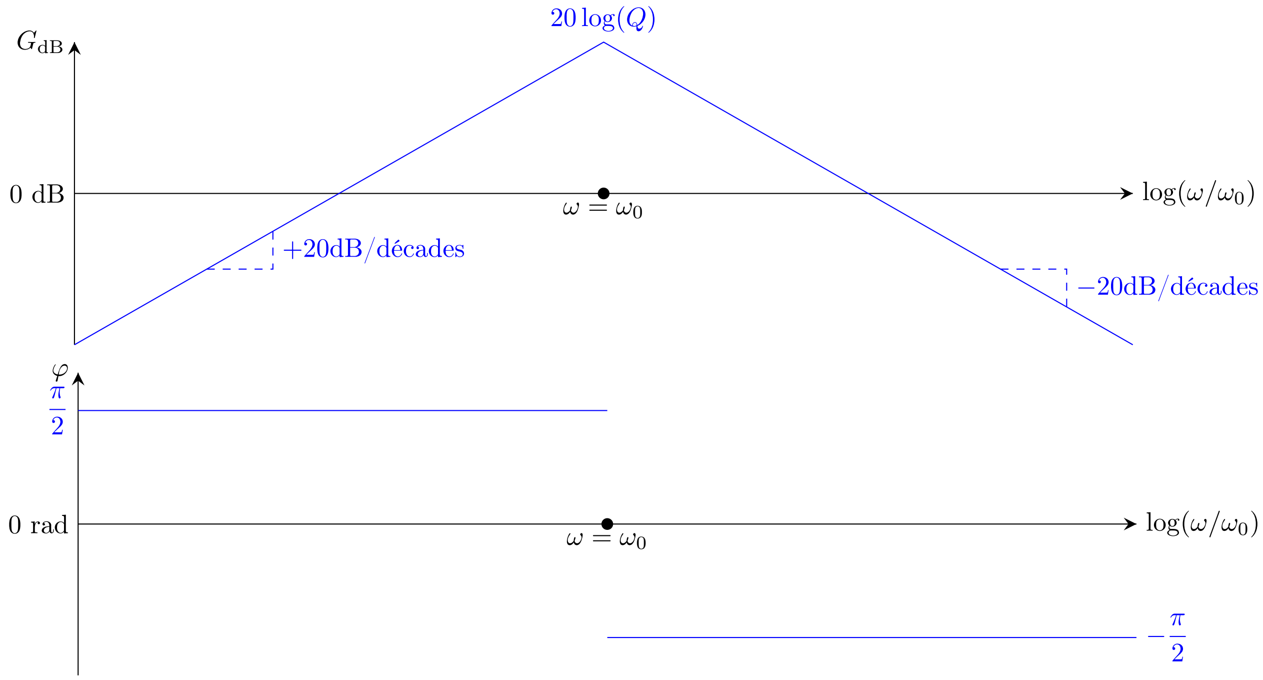
$$\Delta = 1 + 4Q^2 > 0 \Longrightarrow \frac{\omega_2}{\omega_0} = -\frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2Q} > 0$$

On garde pour chaque équation la racine positive d'où $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = \dfrac{1}{Q}$ soit $\boxed{\dfrac{\omega_r}{\Delta\omega} = Q}$

Q.7 En BF ($\omega \ll \omega_0$) : $\underline{H} \simeq \dfrac{1}{-jQ\dfrac{\omega_0}{\omega}}$ donc $\varphi = \arg \underline{H} \simeq \dfrac{\pi}{2}$. et $G_{\text{dB}} = 20\log(|\underline{H}|) \simeq 20\log(\omega/\omega_0) - 20\log(Q)$

En HF ($\omega \gg \omega_0$) : $\underline{H} \simeq \dfrac{1}{+jQ\dfrac{\omega}{\omega_0}}$ donc $\varphi = \arg \underline{H} \simeq -\dfrac{\pi}{2}$. et $G_{\text{dB}} = 20\log(|\underline{H}|) \simeq -20\log(\omega/\omega_0) - 20\log(Q)$

Q.8 On trace le diagramme de Bode :



· · · FIN · · ·