Colle 6 – Questions de cours

Question de cours n^{0}1 — **Théorème (formule de Leibniz)** : si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I (un intervalle de $\mathbb{R}$), alors (fg) l'est également et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad \text{ou} \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Prouvons le théorème par récurrence sur n.

Posons $\mathrm{P}(n)$: "si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors fg l'est aussi et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$".

➤**Initialisation** : soient f et g deux fonctions continues (c'est à dire de classe $\mathscr{C}^0$) sur I. Alors fg est continue sur I, et on a $(fg)^{(0)} = fg$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)} = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)} = fg$. D'où $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

➤**Hérédité** : on suppose $\mathrm{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Alors :

$$(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} = f^{(n+1)} g^{(0)} + \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right] + f^{(0)} g^{(n+1)}$$

D'où, en appliquant la relation de Pascal * : $(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$

Cette relation assure que la propriété $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie, ce qui établit l'hérédité.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, et pour tout couple de fonctions (f, g) de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, fg est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et : $\quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Question de cours n^{0}2 — **Exercice**. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^{2022}}{2022^x} = 0$.

Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{x^{2022}}{2022^x} = \frac{\mathrm{e}^{2022 \ln(x)}}{\mathrm{e}^{x \ln(2022)}} = \mathrm{e}^{2022 \ln(x) - x \ln(2022)} = \mathrm{e}^{x\left(2022 \frac{\ln(x)}{x} - \ln(2022)\right)}$$

Puisque $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissances comparées), on a : $\lim_{x \to +\infty} 2022 \dfrac{\ln(x)}{x} - \ln(2022) = -\ln(2022)$.

On en déduit que : $\lim_{x \to +\infty} x \left(2022 \dfrac{\ln(x)}{x} - \ln(2022)\right) = -\infty$.

Conclusion. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^{2022}}{2022^x} = 0$

---

*. $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Question de cours n^{0}3 — **Propriété** : la composée de deux applications injectives (*resp.* surjectives) est injective (*resp.* surjective).

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

➤ **Supposons f et g injectives**. Soient x et x' deux éléments de E. Alors :

$$[(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')] \Longleftrightarrow [g(f(x)) = g(f(x'))] \underbrace{\Longrightarrow}_{g \text{ injective}} [f(x) = f(x')] \underbrace{\Longrightarrow}_{f \text{ injective}} [x = x']$$

Ce qui prouve l'injectivité de $g \circ f$. **Conclusion** : si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

➤ **Supposons à présent f et g surjectives**. Soit $z \in G$.

Alors, l'application g étant surjective : $\exists\, y \in F,\ g(y) = z$.

Et puisque f est surjective : $\exists\, x \in E,\ f(x) = y$.

En exploitant ces deux relations, on a : $g(f(x)) = z$.

Puisque z est un élément arbitraire de G, on vient d'établir que : $\forall\, z \in G,\ \exists\, x \in E,\ (g \circ f)(x) = z$.

Ce qui prouve la surjectivité de $g \circ f$. **Conclusion** : si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Corollaire immédiat. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Question de cours n^{0}4 — **Propriété**. $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.

On établit en premier lieu l'existence d'une bijection entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$.† A cette fin, on définit deux applications :

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad n \longmapsto \frac{-n}{2} \text{ si } n \text{ est pair}\,;\ \frac{n+1}{2} \text{ sinon}$$

et

$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad n \longmapsto -2n \text{ si } n \text{ est négatif ou nul}\,;\ 2n-1 \text{ sinon}$$

Vérifions que : $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Soit n un entier naturel ; on distingue deux cas.

➤ **Si n est pair** : alors $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g\left(\dfrac{-n}{2}\right) = -2 \times \dfrac{-n}{2} = n$.

➤ **Si n est impair** : alors $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g\left(\dfrac{n+1}{2}\right) = 2 \times \dfrac{n+1}{2} - 1 = n$.

En résumé : $\forall n \in \mathbb{N},\ (g \circ f)(n) = n$, ce qui assure que : $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

La vérification de $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ est analogue.

Puisque $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, on peut conclure (théorème de la question de cours 6) que f (et g) sont bijectives. Il s'ensuit que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

La preuve de la dénombrabilité de $\mathbb{N}^*$ provient du fait que les applications

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*,\ n \longmapsto n+1 \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N},\ n \longmapsto n-1$$

sont telles que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^*}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ (ce sont deux vérifications immédiates).

†. Ce qui prouve la propriété, puisqu'un ensemble est par définition dénombrable lorsqu'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

QUESTION DE COURS N^{0}5 — **Propriété**. Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$. On a :

1/ $[g \circ f$ injective$] \Longrightarrow [f$ injective$]$

2/ $[g \circ f$ surjective$] \Longrightarrow [g$ surjective$]$

1/ Soient x et x' deux éléments de E. Supposons que $f(x) = f(x')$. Alors : $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Puisque $g \circ f$ est injective par hypothèse, on en déduit que $x = x'$.

Finalement : $\forall\ (x, x') \in E^2,\ [f(x) = f(x')] \Longrightarrow [x = x']$. Ce qui signifie que f est injective.

Ainsi : $[g \circ f$ injective$] \Longrightarrow [f$ injective$]$.

2/ Soit $z \in G$. Puisque $g \circ f$ est surjective par hypothèse, il existe un élément x de E tel que : $g(f(x)) = z$. D'où $z \in g(F)$, ce qui signifie que g est surjective.

Ainsi : $[g \circ f$ surjective$] \Longrightarrow [g$ surjective$]$.

QUESTION DE COURS N^{0}6 — **Théorème**. Soient E et F deux ensembles, et $f \in F^E$.

f est bijective SSI il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que : $f \circ g = \mathrm{id}_F$ **et** $g \circ f = \mathrm{id}_E$

➤ **Sens direct** : supposons f bijective.

Puisque f est bijective, tout élément y de F admet un unique antécédent dans E par f, que nous noterons x_y.

On définit alors une application $g : F \longrightarrow E$ en posant pour tout élément y de F : $g(y) = x_y$ (on associe à y son unique antécédent par f).

Vérifions que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ **et** $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Pour la première égalité : soit $y \in F$. Alors $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y$ (puisque x_y est l'unique antécédent de y par f). Ainsi : $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Passons à la seconde égalité : soit $x \in F$. Alors $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$ (puisque, f étant bijective, x est l'unique antécédent de $f(x)$ par f). Ainsi : $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Conclusion intermédiaire : si f est bijective, alors il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

➤ **Réciproque** : supposons qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Soient x et x' deux éléments de E tels que : $f(x) = f(x')$. On a alors : $g(f(x)) = g(f(x'))$ et puisque $g \circ f = \mathrm{id}_E$, on en déduit $x = x'$. Ce qui prouve que f est injective.

Soit y un élément de f. On a : $y = \mathrm{id}_F(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$. Donc y admet un antécédent par f (qui est $g(y)$). Puisque y est un élément arbitraire de F dans ce petit raisonnement, on en déduit que f est surjective.

L'application f étant injective et surjective, elle est bijective. ‡

Conclusion intermédiaire bis : s'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$, alors f est bijective.

Synthèse : f est bijective SSI il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que

$$f \circ g = \mathrm{id}_F \ \textbf{et}\ g \circ f = \mathrm{id}_E.$$

‡. Remarque : la preuve de cette réciproque peut également être faite à l'aide de la question de cours précédente.