MPSI – Colle 6 (7 au 10 novembre 2022) : Fonctions numériques - Applications

Chapitre 5 : Fonctions numériques (révisions)

1 – Généralités, **2 – Fonctions et inégalités**, **3 – Valeur absolue**, **4 – Fonctions dérivables (rappels de T$^{\text{ale}}$ et un peu plus)**, **5 – Dérivées d'ordre supérieur : définition de dérivée n-ième de f**, **6 – Fonctions numériques usuelles**, **7 – Croissances comparées** Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} = 0$

3) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\beta \left|\ln(x)\right|^\alpha = 0$

Chapitre 6 : Applications

1 – Définitions et premiers exemples

Définition (“naïve”). Soient E et F deux ensembles. Une **application** de E dans F est un procédé qui permet d'associer à tout élément x de l'ensemble E un unique élément noté $f(x)$ de l'ensemble F, appelé **image** de x par f.

Définition (“la vraie”). Soient E et F deux ensembles. Une **application** de E dans F est une partie Γ_f de $E \times F$ telle que : $\forall\, x \in E,\ \exists!\, y \in F,\ (x, y) \in \Gamma_f$. Ainsi, pour tout $x \in E$, l'unique élément y de F tel que le couple (x, y) appartienne à Γ_f est noté $f(x)$ et est appelé **image** de x par f.

Exemples : les fonctions usuelles sont des applications (en général d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, vers $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; le fait d'associer à une fonction $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ sa dérivée $f' \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ est une application ; la conjugaison complexe $(z \mapsto \bar{z})$ est une application (de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) ; *etc...*

Remarque : le point-clef est qu'une application n'est pas “qu'une formule”. C'est la donnée d'un <u>nom</u>, d'un <u>ensemble de définition</u> (ou domaine), d'un <u>ensemble d'arrivée</u> (ou codomaine), et de la description du procédé qui à un élément de l'ensemble de définition associe son image. Une des notations ci-dessous doit donc être respectée lorsque l'on se réfère à une application :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad f : x \in E \longmapsto f(x) \in F$$

Notation. On note F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Définition. Soit E un ensemble. L'**identité de** E est l'application qui à tout élément x de E associe x. Elle est notée id_E.

Définition. Soient E, F et G trois ensembles ; $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On définit la **composée de f et** g et on note $g \circ f$ l'application de E dans G qui à tout élément x de E associe $g\left(f(x)\right)$, ce que l'on écrit :

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g\left(f(x)\right) \end{aligned}$$

Exemple : on note $\exp : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln(x) \in \mathbb{R}$. Alors $\exp \circ \ln = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}$; tandis que $\ln \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Les composées $\exp \circ \ln$ et $\ln \circ \exp$ sont donc distinctes.

Remarque : on a déjà observé (dans le cadre des similitudes, puis des fonctions) que **la composition des applications n'est pas commutative**. En revanche, la composition est associative :

Propriété. Soient E, F, G et H quatre ensembles, et $f \in F^E$, $g \in G^F$, $h \in H^G$ trois applications. On a : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Propriété. Pour toute application $f : E \longrightarrow F$, on a $f \circ \mathrm{id}_E = f$ et $\mathrm{id}_F \circ f = f$ (l'identité est l'élément neutre pour la composition des applications).

2 – Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition. Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F. On dit que f est **injective** (*resp.* **surjective**, **bijective**) si tout élément de F admet au plus un (*resp.* au moins un, *resp.* exactement un) antécédent par f dans E.

Traduction à l'aide de quantificateurs : soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

$$[f \text{ injective }] \Longleftrightarrow \left[\forall\,(x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\right]$$

$$[f \text{ surjective }] \Longleftrightarrow \left[\forall y \in F,\ \exists\, x \in E,\ y = f(x)\right]$$

$$[f \text{ bijective }] \Longleftrightarrow \left[\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ y = f(x)\right]$$

Propriété. Soient E, F et G trois ensembles ; $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Si f et g sont injectives (*resp.* surjectives), alors la composée $g \circ f$ est injective (*resp.* surjective).

Corollaire. Soient E, F et G trois ensembles ; $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Si f et g sont bijectives, alors la composée $g \circ f$ est bijective.

3 – Bijections réciproques

Théorème. Soient E et F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application.
f est bijective SSI il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que

$$f \circ g = \mathrm{id}_F \ \underline{\underline{\textbf{et}}}\ g \circ f = \mathrm{id}_E.$$

Propriété, définition et notation. Lorsque f est bijective, l'application g du théorème ci-dessus est **unique**, appelée **bijection réciproque** de f, notée f^{-1}.

Propriétés des bijections réciproques. Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

- Si f est bijective, alors f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- Si f et g sont bijectives, alors $(g \circ f)$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Définition. Soit E un ensemble. Une **involution** de E est une application f de E dans E telle que : $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

Propriété. Soit E un ensemble. Toute involution de E est bijective, et est sa propre bijection réciproque.

4 – Ensembles équipotents et dénombrables

Définition. Deux ensembles E et F sont **équipotents** lorsqu'il existe une bijection entre E et F. On le note $E \sim F$.

Exemples : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont équipotents puisque la fonction exponentielle induit une bijection du premier ensemble vers le second.

Définition. Un ensemble E est **dénombrable** si E et $\mathbb{N}$ sont équipotents.

Exemples : $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables ; $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

Questions de cours

- Formule de Leibniz.
- **Exercice**. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2022}}{2022^x} = 0$
- **Propriété**. La composée de deux applications injectives (*resp.* surjectives) est injective (*resp.* surjective).
- **Propriété** : $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.
- **Exercice classique**. 1/ Si $g \circ f$ est injective alors f est injective. 2/ Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
- **Théorème** (volontaires seulement). Soient E et F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application. f est bijective SSI il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que : $f \circ g = \mathrm{id}_F$ $\underline{\underline{\textbf{et}}}$ $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Objectifs de la semaine :

- Savoir calculer une **dérivée n-ème**, connaître (ou savoir retrouver rapidement) les **dérivées n-èmes usuelles**, **formule de Leibniz**.

  Exemple : calculer la dérivée n-ème de $x \longmapsto f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{ax+b}$
- **Formule indispensable** : $\forall\, a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall\, b \in \mathbb{R}$, $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$.

  Exemples d'utilisation : étudier $f(x) = x^{1/x}$; résoudre $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.
- Connaître les **développements limités à l'ordre 1** des fonctions usuelles, ainsi que les **croissances comparées** pour lever une indétermination dans un calcul de limite. **Formule-clef** : "$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$".

  Exemples : calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$, ou calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- Connaître les **définitions "d'inj-surj-bijective"** (avec une phrase et avec des quantificateurs) pour établir qu'une application possède (ou non) l'une de ces propriétés.

  Exemples : questions de cours 3, 4 et 5 de ce programme de colle.