

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°4 — 18 OCTOBRE 2022

- *La durée du devoir est de 1 heure 30, les calculatrices sont interdites.*
- *Le sujet est rédigé sur 2 pages, et est constitué de 3 exercices.*

EXERCICE 1 — (APPLICATIONS DIVERSES DU COURS).

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ RACINES CARRÉES D'UN NOMBRE COMPLEXE. On pose :

$$Z_1 = -2 + 2i \quad \text{et} \quad Z_2 = 8 - 6i$$

a/ Donner la forme exponentielle de Z_1 (aucune justification n'est nécessaire); en déduire les racines carrées de Z_1 .

b/ Déterminer les racines carrées de Z_2 .

2/ DÉRIVÉE n -ÈME. Pour tout réel x , on pose : $f(x) = (1 - 3x)e^{2x}$. Etablir que pour tout entier naturel n , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{2x}$$

où P_n est un polynôme dont l'expression est à préciser.

3/ LIMITES. Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \tan\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2022}}{2022^x}$$

4/ “ANGLE-MOITIÉ”. Soit x un nombre réel. Etablir que :

$$1 - e^x = \lambda e^{x/2} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)$$

où λ est un réel dont la valeur est à préciser.

5/ PUISSANCES. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation :

$$x^{(2x^2)} = (\sqrt{x})^{12x-8}$$

6/ EQUATION COMPLEXE. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^6 - 9z^3 + 8 = 0$$

EXERCICE 2 — (EQUATION COMPLEXE, ET VALEUR EXACTE DE $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$).

Dans cet exercice, on considère l'équation **(E)** d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$\textbf{(E)} \quad (z + i)^5 = (z - i)^5$$

On se propose ici de résoudre cette équation par deux méthodes, et d'en déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

1/ Questions préliminaires.

a/ Justifier brièvement que : $0 < \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) < 1$

b/ A l'aide du binôme de Newton, développer $(z + i)^5$ (avec $z \in \mathbb{C}$ quelconque).

c/ Rappeler la définition de racine cinquième de l'unité ; puis écrire $\mathbb{U}_5$ en extension.

2/ Première méthode. En développant les deux termes de **(E)** grâce à la formule du binôme de Newton, résoudre cette équation.

3/ Deuxième méthode. Résoudre l'équation **(E)** en utilisant les racines 5-èmes de l'unité.

4/ Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

EXERCICE 3 — (SOMMES). Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel non-nul x , on pose :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k e^{kx} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^n e^{2kx}$$

1/ Etablir que pour tout réel non-nul x on a :

$$g(x) = e^{nx} \frac{\operatorname{sh}((n+1)x)}{\operatorname{sh}(x)}$$

2/ Montrer que pour tout réel non-nul x on a :

$$f(x) = (1 - e^x) g(x)$$

Barème indicatif :

- Exercice 1 : 17pts (4 + 3 + 3 + 1 + 3 + 3)
- Exercice 2 : 11pts (1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 2)
- Exercice 3 : 6pts (3 + 3)

EXERCICE 4 — (LIMITE).

Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)}{x^{2/3}}$$

EXERCICE 5 — (UNE PROPRIÉTÉ DE $\mathbb{U}_n$).

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Calculer le produit des racines n -èmes de l'unité, c'est-à-dire calculer le produit :

$$P = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$$

EXERCICE 6 — (UNE AUTRE PROPRIÉTÉ DE $\mathbb{U}_n$).

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Etablir que :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1| = 2 \cotan \left(\frac{\pi}{2n} \right)$$

où l'on a noté : $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$.