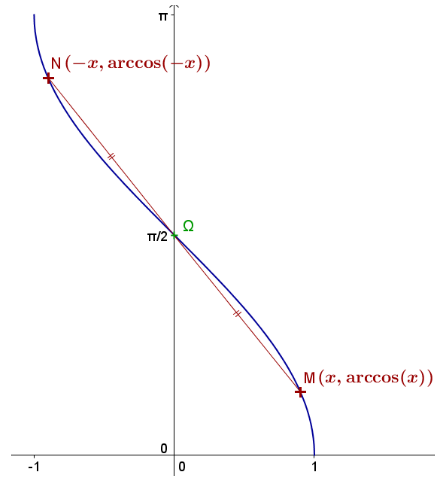
Exercices 7 – Applications & Fonctions circulaires réciproques

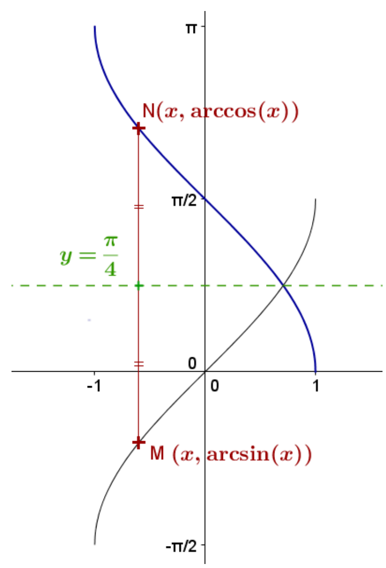


Exercice 1. — Montrer que : $\forall\, x \in [-1;1]\,, \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$

Interprétation graphique. *Le point de coordonnées* $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *est le centre de symétrie de la courbe représentative de arccos (voir ci-contre).*

Exercice 2. — Prouver que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Et que peut-on dire de $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ lorsque $x < 0$?



Exercice 3. — Montrer que : $\forall\, x \in [-1;1]\,, \quad \arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Interprétation graphique. *Les courbes représentatives de arccos et de arcsin sont symétriques par rapport à la droite d'équation* $y = \dfrac{\pi}{4}$ *(voir ci-contre).*

Exercice 4. — Etablir que : $\forall\, x \geqslant 0,\ \arcsin(x) \geqslant x$.

Interprétation graphique. *La courbe représentative de arcsin est située au-dessus de sa tangente à l'origine (la droite d'équation* $y = x$*) sur* $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5. — Etablir que : $\forall\, x \geqslant 0,\ \arctan(x) \leqslant x$.

Interprétation graphique. *La courbe représentative de arctan est située au-dessus de sa tangente à l'origine (la droite d'équation* $y = x$*) sur* $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6. — Simplifier les expressions suivantes :

1/ $\sin(\arccos(x))$	3/ $\cos(2\arccos(x))$	5/ $\sin(2\arccos(x))$	7/ $\sin(2\arctan(x))$
2/ $\cos(\arcsin(x))$	4/ $\cos(2\arcsin(x))$	6/ $\cos(2\arctan(x))$	8/ $\tan(2\arcsin(x))$

Exercice 7. — Etablir que : $\dfrac{\pi}{4} = \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)$

Exercice 8. — **Formule de Machin.** [*]

1/ Calculer $A = 4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$.

2/ Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$. Montrer que : $\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) + \arctan\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

3/ Montrer que : $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

---

[*]. John Machin fut un mathématicien anglais du 18ème siècle (1680-1751), notamment connu pour avoir démontré en 1706 la formule que l'on vous demande d'établir dans cet exercice, qui lui a permis d'obtenir une remarquable (pour l'époque) approximation du nombre π (100 décimales).

Extraits de DS

Exercice 9. — **(Ca-deau !).** On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \arctan\left(x^3\right)$. Etablir que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on précisera.

Exercice 10. — **(Tangente et Arctangente).**

1/ Rappeler la formule de soustraction pour la tangente.

2/ Etablir que pour tout entier naturel n on a : $\arctan\left(\dfrac{1}{n+2}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+3n+1}\right)$

3/ En déduire la valeur de $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+3n+1}\right)$ en fonction de N ; puis la limite $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N$.

Exercice 11. — **(Cosinus et arccosinus).**

1/ Rappeler la formule d'addition pour le cosinus.

2/ Etablir que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\arccos\left(\frac{1}{n}\right) + \arccos\left(\frac{1}{n+1}\right) = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{(n^2-1)n(n+2)}}{n(n+1)}\right)$$

Exercice 12. — **(Arcsinus).**

1/ On pose $A(x) = \cos(\arcsin(x))$. Pour quelles valeurs de x l'expression $A(x)$ est-elle définie ? On note D l'ensemble de ces valeurs. Simplifier $A(x)$ pour tout réel x de D.

2/ Etablir que :

$$\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\right)$$

Exercice 13. — **Une fonction bijective.** On considère la fonction f définie sur $I = \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ en posant pour tout réel x de I : $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

1/ Démontrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} sa bijection réciproque.

2/ Déterminer le sens de variation de f^{-1}.

3/ Justifier que pour tout $x \in J$, $\begin{cases} \cos\left(f^{-1}(x)\right) = \dfrac{1}{x} \\[2ex] \sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} \end{cases}$

4/ Démontrer que f^{-1} est dérivable sur $J\backslash\{1\}$ et établir que :

$$\forall x \in J\backslash\{1\}, \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Exercice 14. — **Equation.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(\text{E}) : \qquad 1 + \tan(x) + \tan^2(x) + \tan^3(x) = 0$$

Indication : mais quelles sont donc les racines du polynôme $1 + X + X^2 + X^3$ *?*