Exercices 6 – Applications – Corrigés

Généralités : applications injectives, surjectives, bijectives

Exercice 1. — On considère l'application Jour : $E = \{\text{Dates de l'année 2022}\} \longrightarrow F = \{\text{lundi, mardi, }\ldots\text{, dimanche}\}$ qui à toute date de l'année 2022 associe le jour de la semaine correspondant. L'application Jour est-elle injective, surjective, bijective ?

lundi possède (au moins) deux antécédents (le 7 et le 14 novembre) : l'application Jour n'est donc pas injective.

Par ailleurs, chaque élément de F possède au moins un antécédent : l'application Jour est donc surjective.

Exercice 2. — L'application $M : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui à tout complexe z associe son module est-elle injective, surjective, bijective ?

Puisque $M(1) = M(\mathrm{i})$, l'application M n'est pas injective.

Par ailleurs, pour tout réel positif x, on a : $x = |x|$, càd : $x = M(x)$. Donc tout réel positif admet un antécédent par l'application M, qui est donc surjective.

L'application M n'est pas injective : elle n'est donc pas bijective.

Exercice 3. — On considère l'application len : $E = \{\text{chaînes de caractères}\} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui à toute chaîne de caractères associe sa longueur. L'application len est-elle injective, surjective, bijective ?

Puisque $\text{len}('MPSI') = \text{len}('PCSI')$, l'application len n'est pas injective.

Par ailleurs, pour tout entier naturel n, on a : $n = \text{len}\,(n *' A')$. Donc tout entier naturel n admet un antécédent par l'application len, qui est donc surjective.

L'application len n'est pas injective : elle n'est donc pas bijective.

Exercice 4. — Soient E, F et G les ensembles suivants : $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{A, B, C, D\}$ et $G = \{+, *\}$.

1/ Construire une application $f_1 : E \longrightarrow F$ injective ; puis une application $f_2 : E \longrightarrow F$ non-injective. Peut-on construire une application surjective de E dans F ?

L'application f_1 définie en posant :

$$f_1(1) = A\,; \qquad f_1(2) = B\,; \qquad f_1(3) = C$$

est injective.

L'application f_2 définie en posant :

$$f_2(1) = A\,; \qquad f_2(2) = B\,; \qquad f_2(3) = B$$

n'est pas injective (B ayant deux antécédents par f_2).

On ne peut pas construire d'application surjective de E dans F, car le cardinal de F est strictement supérieur à celui de E ("il n'y a pas assez d'éléments dans E pour que chaque élément de F possède au moins un antécédent"). *

2/ Construire une application $g_1 : F \longrightarrow G$ surjective ; puis une application $g_2 : F \longrightarrow G$ non-surjective. Peut-on construire une application injective de F dans G ?

L'application g_1 définie en posant :

$$g_1(A) = +\,; \qquad g_1(B) = *\,; \qquad g_1(C) = +\,; \qquad g_1(D) = *$$

est surjective.

L'application g_2 constante égale à * n'est pas surjective.

On ne peut pas construire d'application injective de F dans G, car le cardinal de F est strictement supérieur à celui de G ("il y a trop d'éléments dans F pour que deux éléments distincts de F possèdent systématiquement deux images distinctes dans G"). †

∗. Ce résultat, assez intuitif, sera *démontré* un peu plus tard dans le cours de cette année.

†. Ce résultat, assez intuitif...

Exercice 5. — Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients réels. On considère l'application $D : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par $D(P) = P'$.
Déterminer si l'application D est injective, surjective, bijective.

L'application D n'est pas injective car $D(X) = D(X+1)$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Il existe n réels a_0, a_1, …, a_{n-1} tels que :

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \text{ soit } P = a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

Alors le polynôme primitif de P défini en posant :

$$Q = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} \text{ soit } P = \frac{a_{n-1}}{n}X^n + \cdots + \frac{a_1}{2}X^2 + a_0 X$$

est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $D(Q) = P$.

Il s'ensuit que tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ possède au moins un antécédent par D dans $\mathbb{R}_n[X]$: l'application D est surjective.

Conclusion. L'application D est surjective, mais non injective : elle n'est donc pas bijective.

Exercice 6. — Soit E un ensemble quelconque. On considère l'application Comp : $\mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E)$ qui à toute partie A de E associe son complémentaire $E \backslash A$.
Etablir que l'application Comp est bijective.

Pour toute partie A de E, on a : $\overline{\overline{A}} = A$.

Autrement écrit :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad \text{Comp}\,(\text{Comp}\,(A)) = A \qquad \text{càd :} \quad \text{Comp} \circ \text{Comp} = \text{id}_{\mathscr{P}(E)}$$

Conclusion. L'application Comp est une involution : à ce titre, elle est bijective.

Exercice 7. — Pour chacune des applications ci-dessous, déterminer si elle est injective, surjective, bijective.

1/ $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$
$n \longmapsto n+1$

Considérons l'application $g_1 : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$.
$n \longmapsto n-1$

On vérifie aisément que $g_1 \circ f_1 = \text{id}_{\mathbb{N}}$ et $f_1 \circ g_1 = \text{id}_{\mathbb{N}^*}$. Il s'ensuit que f_1 est bijective (et que g_1 est sa bijection réciproque).

2/ $f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
$n \longmapsto 2n+1$

L'entier 4 ne possède aucun antécédent par f_2 (il n'est pas impair ! ! !). Donc l'application f_2 n'est pas surjective.

En revanche, l'application f_2 est injective car pour tout couple $(n, n') \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$f_2(n) = f_2(n') \Longrightarrow 2n+1 = 2n'+1 \Longrightarrow n = n'$$

Conclusion. L'application f_2 est injective, mais non surjective : elle n'est donc pas bijective.

3/ $f_3 : [0;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos(x)$

Le réel 2 n'a pas d'antécédent par f_3 (la fonction cos étant bornée entre -1 et 1).

La fonction cos est strictement monotone (strictement décroissante) sur $[0, \pi]$; il s'ensuit que l'application f_3 est injective.

Conclusion. L'application f_3 est injective, mais non surjective : elle n'est donc pas bijective.

4/ $f_4 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longmapsto \bar{z}$

Pour tout nombre complexe z, on a : $\bar{\bar{z}} = z$. En d'autres termes : $f_4 \circ f_4 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

Conclusion. L'application f_4 est une involution : à ce titre, elle est bijective.

5/ $f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^3$

La fonction f_5 est :

— strictement croissante sur $\mathbb{R}$;

— continue sur $\mathbb{R}$;

— $\lim\limits_{x \to +\infty} f_5(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_5(x) = -\infty$

Conclusion. La fonction f_5 est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

6/ $f_6 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longmapsto z^3$

L'application f_6 est surjective car tout complexe admet au moins un antécédent par f_6. ‡

Par ailleurs, on a : $f_6(1) = f_6(\mathrm{j})$. Donc l'application f_6 n'est pas injective.

Conclusion. L'application f_6 est surjective mais non injective ; elle n'est donc pas bijective.

‡. Plus précisément, grâce au chapitre sur les nombres complexes : 0 possède un unique antécédent par f_6 (qui est lui-même), et tout complexe non nul possède exactement trois antécédents par f_6 (ses trois racines cubiques).

Exercice 8. — Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto x+y$

On a $f_1(1,3) = f_1(2,2)$. L'application f_1 n'est donc pas injective.

Soit x un nombre réel. On a : $x = f_1(x,0)$. Donc tout réel x admet un antécédent par l'application f_1, qui est donc surjective.

Conclusion. L'application f_1 est surjective mais non injective ; elle n'est donc pas bijective.

2) $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (x+y,y)$

Soient (x,y) et (X,Y) deux éléments de $\mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}
&(x,y) \text{ est un antécédent de } (X,Y) \text{ par } f_2 \\
\iff & f_2(x,y) = (X,Y) \\
\iff & (x+y,y) = (X,Y) \\
\iff & \begin{cases} x+y = X \\ y = Y \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x = X-Y \\ y = Y \end{cases} \\
\iff & (x,y) = (X-Y,Y)
\end{aligned}$$

En résumé, on a établi l'équivalence :

$$[\ (x,y) \text{ est un antécédent de } (X,Y) \text{ par } f_2\ ] \iff [(x,y) = (X-Y,Y)]$$

Ce qui signifie que tout élément (X,Y) de $\mathbb{R}^2$ possède un unique antécédent (qui est le couple $(X-Y,Y)$) par l'application f_2.

Conclusion. L'application f_2 est bijective.

Bonus. La bijection réciproque de f_2 est l'application :

$$\begin{aligned}
f_2^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
(X,Y) &\longmapsto (X-Y,Y)
\end{aligned}$$

3) $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y) \longmapsto (x+y, x-y)$

Soient (x,y) et (X,Y) deux éléments de $\mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}
&(x,y) \text{ est un antécédent de } (X,Y) \text{ par } f_3 \\
&\iff f_3(x,y) = (X,Y) \\
&\iff (x+y, x-y) = (X,Y) \\
&\iff \begin{cases} x+y = X \\ x-y = Y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \dfrac{X+Y}{2} \\ y = \dfrac{X-Y}{2} \end{cases} \\
&\iff (x,y) = \left(\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2}\right)
\end{aligned}$$

En résumé, on a établi l'équivalence :

$$[\ (x,y) \text{ est un antécédent de } (X,Y) \text{ par } f_3\ ] \iff \left[(x,y) = \left(\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2}\right)\right]$$

Ce qui signifie que tout élément (X,Y) de $\mathbb{R}^2$ possède un unique antécédent (qui est le couple $\left(\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2}\right)$) par l'application f_3.

Conclusion. L'application f_3 est bijective.

Bonus. La bijection réciproque de f_3 est l'application :

$$\begin{aligned}
f_3^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
(X,Y) &\longmapsto \left(\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2}\right)
\end{aligned}$$

4) $f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (2x+3y, x-2y)$

Soient (x,y) et (X,Y) deux éléments de $\mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}
&(x,y) \text{ est un antécédent de } (X,Y) \text{ par } f_4 \\
&\iff f_4(x,y) = (X,Y) \\
&\iff (2x+3y, x-2y) = (X,Y) \\
&\iff \begin{cases} 2x+3y = X \\ x-2y = Y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \dfrac{2X+3Y}{7} \\ y = \dfrac{X-2Y}{7} \end{cases} \\
&\iff (x,y) = \left(\frac{2X+3Y}{7}, \frac{X-2Y}{7}\right)
\end{aligned}$$

En résumé, on a établi l'équivalence :

$$[\ (x,y) \text{ est un antécédent de } (X,Y) \text{ par } f_4\ ] \iff \left[(x,y) = \left(\frac{2X+3Y}{7}, \frac{X-2Y}{7}\right)\right]$$

Ce qui signifie que tout élément (X,Y) de $\mathbb{R}^2$ possède un unique antécédent (qui est le couple $\left(\frac{2X+3Y}{7}, \frac{X-2Y}{7}\right)$) par l'application f_4.

Conclusion. L'application f_4 est bijective.

Bonus. La bijection réciproque de f_4 est l'application :

$$\begin{aligned} f_4^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X,Y) &\longmapsto \left(\frac{2X+3Y}{7}, \frac{X-2Y}{7}\right) \end{aligned}$$

5) $\begin{aligned} f_5 : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x+y+z, y+z, z) \end{aligned}$

Soient (x,y,z) et (X,Y,Z) deux éléments de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} &(x,y,z) \text{ est un antécédent de } (X,Y,Z) \text{ par } f_5 \\ \iff &f_5(x,y,z) = (X,Y,Z) \\ \iff &(x+y+z, y+z, z) = (X,Y,Z) \\ \iff &\begin{cases} x+y+z = X \\ y+z = Y \\ z = Z \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} x = X-Y \\ y = Y-Z \\ z = Z \end{cases} \\ \iff &(x,y,z) = (X-Y, Y-Z, Z) \end{aligned}$$

En résumé, on a établi l'équivalence :

$$[\ (x,y,z) \text{ est un antécédent de } (X,Y,Z) \text{ par } f_5\ ] \iff [(x,y,z) = (X-Y, Y-Z, Z)]$$

Ce qui signifie que tout élément (X,Y,Z) de $\mathbb{R}^3$ possède un unique antécédent (qui est le triplet $(X-Y, Y-Z, Z)$) par l'application f_5.

Conclusion. L'application f_5 est bijective.

Bonus. La bijection réciproque de f_5 est l'application :

$$\begin{aligned} f_5^{-1} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (X,Y,Z) &\longmapsto (X-Y, Y-Z, Z) \end{aligned}$$

6) $f_6 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y,z) \longmapsto (y+z, x+z, x+y)$

Soient (x,y,z) et (X,Y,Z) deux éléments de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
&(x,y,z) \text{ est un antécédent de } (X,Y,Z) \text{ par } f_6 \\
&\iff f_6(x,y,z) = (X,Y,Z) \\
&\iff (y+z, x+z, x+y) = (X,Y,Z) \\
&\iff \begin{cases} y+z = X \\ x+z = Y \\ x+y = Z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \dfrac{Y+Z-X}{2} \\ y = \dfrac{X-Y+Z}{2} \\ z = \dfrac{X+Y-Z}{2} \end{cases} \\
&\iff (x,y,z) = \left(\frac{Y+Z-X}{2}, \frac{X-Y+Z}{2}, \frac{X+Y-Z}{2}\right)
\end{aligned}$$

En résumé, on a établi l'équivalence :

$$[\ (x,y,z) \text{ est un antécédent de } (X,Y,Z) \text{ par } f_6\ ] \iff \left[(x,y,z) = \left(\frac{Y+Z-X}{2}, \frac{X-Y+Z}{2}, \frac{X+Y-Z}{2}\right)\right]$$

Ce qui signifie que tout élément (X,Y,Z) de $\mathbb{R}^3$ possède un unique antécédent

$$\left(\text{qui est le triplet } \left(\frac{Y+Z-X}{2}, \frac{X-Y+Z}{2}, \frac{X+Y-Z}{2}\right)\right) \text{ par l'application } f_6.$$

Conclusion. L'application f_6 est bijective.

Bonus. La bijection réciproque de f_6 est l'application :

$$\begin{aligned}
f_6^{-1} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
(X,Y,Z) &\longmapsto \left(\frac{Y+Z-X}{2}, \frac{X-Y+Z}{2}, \frac{X+Y-Z}{2}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 9. — (Similitudes directes) Soient a et b deux nombres complexes, a non nul. On considère l'application $S : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ d'écriture complexe $z \longmapsto az+b$.

1/ Etablir que S est bijective. 2/ A quelle(s) condition(s) sur a et b l'application S est-elle une involution ?

Voir problème de la semaine "Toussaint".

Exercice 10. — L'application

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
(u,v) &\longmapsto (3uv, u^3+v^3)
\end{aligned}$$

est-elle injective, surjective, bijective ?

Voir problème de la semaine "Toussaint".

Fonctions numériques injectives, surjectives, bijectives

Exercice 11. — Corrigé fait en TD.

Images directes, images réciproques

Définitions. Soit $f \in F^E$.
➢ L'**image de** f, notée $\mathrm{Im}(f)$ ou $f(E)$ est la partie de F suivante :
$$f(E) = \{f(x),\ x \in E\} \text{ ou } f(E) = \{y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)\}.$$
➢ Plus généralement, lorsque A est une partie de E, l'**image (directe) de** A **par** f, notée $f(A)$ est la partie de F suivante : $f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$ ou $f(A) = \{y \in F,\ \exists x \in A,\ y = f(x)\}$.
➢ Lorsque B est une partie de F, l'**image réciproque de** B **par** f, notée $f^{-1}(B)$ est la partie de E suivante : $f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}$.

Exercice 12. — Déterminer l'image directe de $[\mathrm{e}; +\infty[$ par la fonction ln ; puis celle de $[0; \pi]$ par la fonction sinus.

On a : $\ln([\mathrm{e}; +\infty[) = [1, +\infty[$ et $\sin([0, \pi]) = [0, 1]$.

Exercice 13. — Déterminer l'image réciproque de $[-1; 9]$ par la fonction carrée ; puis celle de $[-1; 1]$ par cos.

L'image réciproque de $[-1; 9]$ par la fonction carrée est l'ensemble des réels x tels que : $-1 \leqslant x^2 \leqslant 9$. Il s'agit donc de l'intervalle $[-3, 3]$.

L'image réciproque de $[-1; 1]$ par la fonction cos est l'ensemble des réels x tels que : $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$. Il s'agit donc de l'ensemble $\mathbb{R}$.

Exercice 14. — Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F.

1/ On considère A et B deux parties de E. Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$

Supposons que $A \subset B$.

Soit $y \in f(A)$. Alors : $\exists a \in A,\ y = f(a)$.

Puisque A est inclus dans B, on peut affirmer que $a \in B$.

Ainsi on a écrit : $y = f(a)$, avec $a \in B$. Ce qui signifie que $y \in f(B)$.

En résumé : $y \in f(A) \Longrightarrow y \in f(B)$. Ce qui assure que : $f(A) \subset f(B)$.

Conclusion. $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$

2/ On considère A' et B' deux parties de F. Montrer que : $A' \subset B' \Longrightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

Supposons que $A' \subset B'$.

Soit $x \in f^{-1}(A')$. Alors : $f(x) \in A'$.

Puisque A' est inclus dans B', on peut affirmer que $f(x) \in B'$.

Ce qui signifie que $x \in f^{-1}(B')$.

En résumé : $x \in f^{-1}(A') \Longrightarrow y \in f^{-1}(B')$. Ce qui assure que : $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$.

Conclusion. $A' \subset B' \Longrightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

Exercice 15. — Mêmes notations que dans l'exercice précédent.

1/ Montrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Soit $y \in F$. On a :

$$\begin{aligned} & y \in f(A \cup B) \\ \iff & \exists x \in A \cup B, \quad y = f(x) \\ \iff & \exists x \in A, \quad y = f(x) \quad \text{ou} \quad \exists x \in B, \quad y = f(x) \\ \iff & y \in f(A) \quad \text{ou} \quad y \in f(B) \\ \iff & y \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

Conclusion. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2/ Montrer que : $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(A \cup B) \\ \iff & f(x) \in A \cup B \\ \iff & f(x) \in A \quad \text{ou} \quad f(x) \in B \\ \iff & x \in f^{-1}(A) \quad \text{ou} \quad x \in f^{-1}(B) \\ \iff & x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{aligned}$$

Conclusion. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

Propriétés des applications injectives, surjectives, bijectives

Exercice 16. — **Exercice classique** Soient E, F et G trois ensembles ; $f \in F^E$ et $g \in G^F$ deux applications. Montrer que :

1/ $[(g \circ f) \text{ injective}] \Longrightarrow [f \text{ injective}]$;

Cf cours.

2/ $[(g \circ f) \text{ surjective}] \Longrightarrow [g \text{ surjective}]$;

Cf cours.

3/ $[(g \circ f) \text{ surjective } \wedge g \text{ injective}] \Longrightarrow [f \text{ surjective}]$;

Supposons $(g \circ f)$ surjective $\wedge\, g$ injective.

Soit $y \in F$. Alors : $g(y) \in G$.

Puisque $g \circ f$ est surjective par hypothèse : $\exists x \in E,\ g(y) = g(f(x))$.

L'application g étant injective (par hypothèse encore), on en déduit que $y = f(x)$.

En résumé : $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$.

L'application f est donc surjective.

Conclusion. $[(g \circ f)$ surjective $\wedge\, g$ injective$] \Longrightarrow [f$ surjective$]$

4/ $[(g\,o\,f)$ injective $\wedge\, f$ surjective$] \Longrightarrow [g$ injective$]$.

Supposons $[(g\,o\,f)$ injective $\wedge\, f$ surjective$]$.

Soient y et y' dans F tels que : $g(y) = g(y')$.

Puisque f est surjective, il existe x et x' dans E tels que : $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.

On déduit des deux lignes précédentes que : $g(f(x)) = g(f(x'))$.

L'application $g \circ f$ étant injective, on en déduit que : $x = x'$.

Par suite : $y = y'$.

En résumé, on a établi que : $g(y) = g(y') \Longrightarrow y = y'$. L'application g est donc injective.

Conclusion. $[(g\,o\,f)$ injective $\wedge\, f$ surjective$] \Longrightarrow [g$ injective$]$

Exercice 17. — Soient $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ les deux applications définies par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ f(k) = 2k \qquad et \quad g(k) = \begin{cases} k/2 \text{ si } k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

1/ Etudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de f et de g.

Juste les réponses : f est injective, non surjective (donc non bijective).

g est surjective, non injective (donc non bijective).

2/ Calculer $g\,o\,f$ et $f\,o\,g$. Etudier leur injectivité, surjectivité, bijectivité.

On a : $g\,o\,f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

Et : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ (f \circ g)(k) = \begin{cases} k \text{ si } k \text{ est pair} \\ k-1 \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}$

Conclusion. $g\,o\,f$ est bijective ; et $f\,o\,g$ n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 18. — Soient E un ensemble, et $f \in E^E$ une application. On suppose que $f\,o\,f\,o\,f = \mathrm{id}_E$. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

D'après le cours : f est bijective et sa bijection réciproque est $f \circ f$.

Exercice 19. — Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Conclusion.

Exercice 20. — Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que :

$$[f \text{ injective}] \Longleftrightarrow [f \text{ surjective}]$$

Conclusion.

Extraits de DS

Exercice 21. — **(Cadeau)** On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs, c'est à dire :

$$2\mathbb{N} = \{2k \,/\, k \in \mathbb{N}\}$$

Etablir que $2\mathbb{N}$ est dénombrable.

Les applications $f : n \in \mathbb{N} \longmapsto 2n \in 2\mathbb{N}$ et $g : N \in 2\mathbb{N} \longmapsto \dfrac{N}{2} \in \mathbb{N}$ vérifient clairement $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ et $f \circ g = \mathrm{id}_{2\mathbb{N}}$.

On en déduit qu'elles sont bijectives (et réciproques l'une de l'autre).

Ainsi les ensembles $\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}$ sont équipotents.

Conclusion. $2\mathbb{N}$ est dénombrable.

Exercice 22. — (In-ra-ta-ble !) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (4x-3y,\ 2x+y) \end{aligned}$$

est bijective. Puis donner l'expression de sa réciproque F^{-1}.

Soit (X,Y) un élément arbitraire de $\mathbb{R}^2$. Résolvons l'équation $F(x,y)=(X,Y)$.

On a : $F(x,y)=(X,Y) \iff \left\{ \begin{array}{ll} 3x+y=X & (L_1) \\ 4x+2y=Y & (L_2) \end{array} \right.$

Alors : $2(L_1)-(L_2) \iff x=\dfrac{2X-Y}{2}$. Et : $3(L_2)-4(L_1) \iff y=\dfrac{3Y-4X}{2}$.

En d'autres termes : $F(x,y)=(X,Y) \iff (x,y)=\left(\dfrac{2X-Y}{2},\dfrac{3Y-4X}{2}\right)$.

On a ainsi établi que tout élément (X,Y) de $\mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent par F dans $\mathbb{R}^2$.

Conclusion. L'application F est bijective, et sa bijection réciproque est

$$\begin{aligned} F^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X,Y) &\longmapsto \left(\frac{2X-Y}{2},\frac{3Y-4X}{2}\right) \end{aligned}$$

Exercice 23. — (Un peu technique) Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

Montrer que f est bijective si et seulement si :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E),\ f(E\backslash A) = F\backslash f(A)$$

❀ 1ère étape (sens direct) : supposons que $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ f(E\backslash A) = F\backslash f(A)$

➤ En utilisant l'hypothèse de l'énoncé avec $A=\emptyset$, on obtient : $f(E)=F$. Donc f est surjective.

➤ Soient x et x' deux éléments de E tels que $f(x)=f(x')$. En utilisant l'hypothèse de l'énoncé avec $A=\{x\}$, on obtient : $f(E\backslash\{x\}) = F\backslash\{f(x)\}$.

Raisonnons par l'absurde et supposons $x' \neq x$: alors $x' \in E\backslash\{x\}$, donc $f(x') \in F\backslash\{f(x)\}$, d'où : $f(x) \neq f(x')$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse initiale. Il s'ensuit que $x'=x$.

En résumé : $(f(x)=f(x')) \Longrightarrow (x=x')$, d'où f est injective (donc bijective d'après ce qui précède).

Conclusion intermédiaire : $(\forall A \in \mathscr{P}(E),\ f(E\backslash A) = F\backslash f(A)) \Longrightarrow (f \text{ est bijective})$

❀ 2ème étape (réciproque) : supposons que f est bijective.

Soit A une partie de E. Montrons $f(E\backslash A) = F\backslash f(A)$ en utilisant la règle de double inclusion.

➤ Preuve de "$\subset$" : soit $x \in E\backslash A$. Alors $f(x) \in F\backslash f(A)$. En effet, si $f(x) \notin F\backslash f(A)$, alors on aurait : $f(x) \in f(A)$. Il existerait alors un élément $a \in A$ tel que : $f(x)=f(a)$. On en déduirait que $x=a$ puisque f est bijective (donc en particulier injective). Par suite on aurait : $x \in A$; ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse $(x \in E\backslash A)$.

On a donc établi que : $(x \in E\backslash A) \Longrightarrow (f(x) \in F\backslash f(A))$. D'où : $f(E\backslash A) \subset F\backslash f(A)$

➤ Preuve de "$\supset$" : soit $y \in F\backslash f(A)$. Puisque f est bijective, y admet un unique antécédent $x \in E$. En outre, $x \notin A$, car si l'on avait $x \in A$, on en déduirait $f(x)=y \in f(A)$, ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse initiale.

En résumé, il existe (un unique) élément x de $E\backslash A$ tel que $y=f(x)$. Ceci prouve que : $y \in f(E\backslash A)$.

On a donc établi que : $(y \in F\backslash f(A)) \Longrightarrow (y \in f(E\backslash A))$. D'où : $f(E\backslash A) \supset F\backslash f(A)$

➤ On déduit des deux inclusions précédentes l'égalité : $\boxed{f(E\backslash A) = F\backslash f(A)}$. Et puisque dans ce raisonnement la partie A considérée est arbitraire, on peut énoncer la

$\boxed{\underline{\text{Conclusion intermédiaire bis}} : (f \text{ est bijective}) \Longrightarrow (\forall A \in \mathscr{P}(E),\ f(E\backslash A) = F\backslash f(A))}$

✿ $\boxed{\text{3ème étape (conclusion)} : (f \text{ est bijective}) \Longleftrightarrow (\forall A \in \mathscr{P}(E),\ f(E\backslash A) = F\backslash f(A))}$

Exercice 24. — (Application directe du cours, sur les complexes et les applications) On considère l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto z^3 - 1$$

1/ L'application f est-elle injective ?

Puisque $f(1) = f(\mathrm{j})$, f n'est pas injective.

2/ Justifier que l'application f est surjective.

Tout nombre complexe Z différent de -1 admet exactement 3 antécédents (qui sont les racines cubiques de $Z+1$) par f. Et -1 admet un unique antécédent par f, qui est 0.

Conclusion. f est surjective.

3/ Quels sont les antécédents de 7 par f ?

Les antécédents de 7 par f les racines cubiques de f, càd : 2, 2j et $2\bar{\mathrm{j}}$.

Exercice 25. — Numérotation des nombres rationnels

*Un ensemble E est dit **dénombrable** lorsqu'il est équipotent à $\mathbb{N}$, c'est à dire s'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et E ; cette bijection permet de "numéroter" les éléments de E, ce qui justifie a posteriori la terminologie. Vous avez par exemple déjà établi que $\mathbb{Z}$ est dénombrable (c'était une question de cours au programme de la semaine passée). Plus explicitement :*

Propriété (*) — L'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

est bijective.

Ce résultat pourra être utilisé au besoin au cours du problème, sans qu'il soit nécessaire de le redémontrer.

L'objectif principal de ce problème est d'aller plus loin, et de prouver que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable. Ceci passera par des étapes intermédiaires (notamment : établir que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable) et l'utilisation du théorème de Cantor-Bernstein, dont la preuve fait l'objet de la dernière partie du problème.

Partie I — Proche du cours

1) Notons $E_1 = \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Montrer que E_1 est dénombrable.

2) Notons E_2 l'ensemble des entiers naturels pairs, soit : $E = \{2k \ / \ k \in \mathbb{N}\}$. Montrer que E_2 est dénombrable.

Partie II — Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$, dénombrabilité de $\mathbb{Z}^2$

On définit l'application

$$\varphi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^*$$
$$(p,q) \longmapsto 2^p(2q+1)$$

3) Montrer que φ est bien définie et qu'elle est injective.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier qu'il existe un entier N_0 tel que 2^{N_0} divise n, et 2^{N_0+1} ne divise pas n. Quel est le nom de cet entier N_0 ?

5) En utilisant la question précédente, établir que φ est surjective.

6) Conclure que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable ; puis que $\mathbb{Z}^2$ est dénombrable.

Partie III — Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$

7) Construire une application injective ("simple") de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.

8) On appelle **représentant irréductible** d'un nombre rationnel non nul r l'unique fraction irréductible p/q égale à r avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.§ Nous conviendrons que le représentant irréductible de 0 est $0/1$.

   a) Justifier brièvement que l'application $\psi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ qui à $r \in \mathbb{Q}$ associe le couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est injective. Est-elle surjective ?

   b) Construire une application injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.

Les questions 7 et 8-b permettent alors de conclure via le théorème de Cantor-Bernstein dont la preuve est l'objet de la partie suivante.

Partie IV — Théorème de Cantor-Bernstein

On veut établir l'énoncé ci-dessous :

> Théorème — *Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection entre E et F.*

9) **Le cas particulier des ensembles finis**. L'objectif de cette première question est de montrer que dans le cas où E et F sont de cardinal fini, le théorème est une conséquence immédiate de propriétés vues en cours.

   Dans cette question, on suppose que E et F sont des ensembles finis ; on notera $n = \text{Card}(E)$ et $p = \text{Card}(F)$.

   a) Soit $f : E \longrightarrow F$ une application quelconque. Que peut-on dire de $\text{Card}\,(f(E))$?

   b) On suppose qu'il existe une injection $g : E \longrightarrow F$. Que peut-on dire de $\text{Card}(F)$?

   c) En déduire que s'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection entre E et F.

10) **Le cas général**. On revient au cas général, et on ne suppose plus que E et F sont de cardinal fini.

   On suppose qu'il existe $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications injectives.

   On pose : $h = g \circ f : E \longrightarrow E$ et on note $R = E \setminus g(F)$.

   a) Posons $P = \{M \in \mathscr{P}(E) \ / \ R \subset M \text{ et } h(M) \subset M\}$. Montrer que P est non vide.

   b) Soit $M \in P$. Montrer que $h(R) \subset h(M)$ et que $h(h(M)) \subset h(M)$.

   c) En déduire que $R \cup h(M) \in P$.

   d) On pose à présent $A = \bigcap_{M \in P} M$. On peut observer que A est inclus dans tout ensemble M appartenant à P.

   Montrer que $A \in P$.

   e) A l'aide de la question 10-c, établir que $A \subset R \cup h(A)$; puis que $A = R \cup h(A)$.

   f) Montrer que $g^{-1}(A) = f(A)$.

   g) On pose $A' = f(A)$, $B = E \setminus A$ et $B' = g^{-1}(B)$.
   On considère les applications $f' : A \longrightarrow A'$ et $g' : B' \longrightarrow B$ induites par f et g.

   Justifier brièvement que f' et g' sont injectives.

   h) Montrer que $B' = F \setminus A'$.

   i) Pour conclure, on définit l'application $\varphi : E \longrightarrow F$ en posant :

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \begin{cases} f'(x) \text{ si } x \in A \\ g'^{-1}(x) \text{ sinon} \end{cases}$$

   Montrer que φ est bijective.

§. Par exemple, le représentant irréductible de $10/15$ est $2/3$; celui de $-9/12$ est $(-3)/4$.

Corrigé

Partie I — Proche du cours

1) Considérons les applications $f : n \in E_1 \longrightarrow (n-2) \in \mathbb{N}$ et $g : n \in \mathbb{N} \longrightarrow (n+2) \in E_1$. Il est clair que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{E_1}$. Donc f (tout comme g) est bijective, donc E_1 est dénombrable.

2) Considérons les applications $f : n \in E_2 \longrightarrow (n/2) \in \mathbb{N}$ et $g : n \in \mathbb{N} \longrightarrow (2n) \in E_2$. Il est clair que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{E_2}$. Donc f (tout comme g) est bijective, donc E_2 est dénombrable.

Partie II — Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$, dénombrabilité de $\mathbb{Z}^2$

3) Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, $2^p(2q+1)$ est un entier naturel non nul, donc φ est bien définie.
Soient (p,q) et (p',q') deux couples d'entiers naturels tels que $\varphi(p,q) = \varphi(p',q')$. Alors p et p' sont égaux, car tous deux sont égaux à la valuation 2-adique de $\varphi(p,q)$. On en déduit que $2q+1 = 2q'+1$ d'où évidemment $q = q'$.
Conclusion. φ est injective.

Remarque : *sans utiliser la valuation 2-adique, on peut répondre à cette question comme suit. Si $2^p(2q+1) = 2^{p'}(2q'+1)$, alors $2^p | 2^{p'}(2q'+1)$. Si $p > 0$, cette relation entraîne que $2^p | 2^{p'}$ d'où $p \leqslant p'$. Dans "l'autre sens", on a : $2^{p'} | 2^p(2q+1)$ donc $2^{p'} | 2^p$ donc $p' \leqslant p$; finalement $p = p'$. Si $p = 0$, alors $2^{p'}(2q'+1) = 2q+1$ est impair, ce qui implique $p' = 0$, d'où encore une fois $p = p'$. Une fois cette égalité établie, celle entre q et q' en est une conséquence triviale.*

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \left\{k \in \mathbb{N},\ 2^k | n\right\}$. L'ensemble E est une partie de $\mathbb{N}$ qui est non vide ($0 \in E$) et majorée : en effet, 2^k tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$, et il existe donc un entier K tel que : $(k \geqslant K) \Longrightarrow \left(2^k > n\right)$. Par suite, E admet un plus grand élément, et on peut légitimement poser $N_0 = \max E$.

Par définition de plus grand élément, $N_0 \in E$ et $(N_0+1) \notin E$, c'est-à-dire : 2^{N_0} divise n et 2^{N_0+1} ne divise pas n. Cet entier N_0 est la valuation 2-adique de n (on note : $N_0 = v_2(n)$).

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on peut écrire : $n = 2^{v_2(n)}m$, où m est impair. En effet, si m était pair, alors $2^{v_2(n)+1}$ diviserait n ce qui contredirait la définition de $v_2(n)$. Il existe donc un entier naturel q tel que : $m = 2q+1$ et on peut écrire : $n = 2^{v_2(n)}(2q+1)$, d'où : $n = \varphi\left(v_2(n), q\right)$. Il s'ensuit que n est dans l'image de φ, et puisque n est arbitraire dans le raisonnement précédent, on peut conclure que φ est surjective.

6) D'après les questions 3 et 5, $\varphi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^*$ est bijective. En outre, $g : n \in \mathbb{N}^* \longrightarrow (n-1) \in \mathbb{N}$ est bijective (question de cours d'une colle récente). La composée de deux bijections étant encore bijective, on en déduit que l'application $g \circ \varphi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ est bijective. Conclusion. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Par ailleurs, d'après la propriété $(*)$, il existe une bijection $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, donc il existe une bijection $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ (avec $h = f^{-1}$). On définit alors une bijection H de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{N}^2$ en posant :

$$\begin{aligned} H : \mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \mathbb{N}^2 \\ (n,m) &\longmapsto (h(n), h(m)) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'application $g \circ \varphi \circ H : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ est bijective[¶], d'où : $\mathbb{Z}^2$ est dénombrable.

Partie III — Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$

7) L'application $\iota : n \in \mathbb{N} \longrightarrow n \in \mathbb{Q}$ est clairement injective.[‖]

8) a) Soient x et x' deux rationnels. Si x et x' ont la même image (p,q) par ψ, alors $x = x' = p/q$. Donc ψ est injective.
En revanche, ψ n'est pas surjective puisque par exemple $(2,4)$ n'appartient pas à l'image de ψ, comme plus généralement tout couple d'entiers non nuls non premiers entre eux.

b) On dispose d'une application injective (et même bijective) $h = f^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, et d'une application injective (et même bijective) $g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$. On peut donc construire une application injective :

$$\begin{aligned} G : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{N}^2 \\ (n,m) &\longmapsto (h(n), g(m)) \end{aligned}$$

On dispose en outre d'une application injective (et même bijective) $g \circ \varphi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$. La composition de deux injections étant encore une injection, l'application :

¶. C'est la composée de 3 bijections.
‖. C'est l'injection *canonique* de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} g\circ\varphi\circ G : \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n,m) &\longmapsto g\left(\varphi\left(h(n),g(m)\right)\right) \end{aligned}$$

est injective. Une nouvelle application de la stabilité de l'injectivité par composition permet enfin de conclure que l'application :

$$\begin{aligned} g\circ\varphi\circ G\circ\psi : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ r &\longmapsto g\left(\varphi\left(G\left(\psi(r)\right)\right)\right) \end{aligned}$$

est injective. Conclusion. Il existe une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.

D'après les questions 7 et 8-b, il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ et une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$. Le théorème de Cantor-Bernstein permet alors d'affirmer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$. Par suite : $\mathbb{Q}$ est dénombrable.