Problème de la semaine 4 (Toussaint)

Exercice 1 — (Application). On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (3x - 5y,\, x - 2y) \end{aligned}$$

Etablir que f est bijective, et déterminer l'expression de sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 2 — (Limite).

Soit β un réel. On pose, pour tout entier naturel non nul n : $u_n = 1 - \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}$.

1/ Pour tout réel $x > -1$, on pose : $f(x) = \sqrt{1+x}$. Rappeler la formule donnant le développement limité à l'ordre 1 en 0 de f.

2/ Déterminer en fonction de β la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\beta} u_n$.

Exercice 3 — (Applications - Similitudes directes).
Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, avec $a \neq 0$, on définit une application $f_{a,b} \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ en posant :

$$\begin{aligned} f_{a,b} : \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto az + b \end{aligned}$$

Une telle application $f_{a,b}$ est appelée une **similitude directe**, et on note $\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$ l'ensemble des similitudes directes :

$$\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C}) = \{f_{a,b},\ (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}$$

1/ **Deux cas particuliers**.

a/ **Le cas** $a = 1$. Soit b un nombre complexe. Montrer que l'application $f_{1,b}$ est une bijection, et déterminer sa bijection réciproque.

b/ **L'application** $f_{1+\mathrm{i},2}$. Dans cet exemple, on pose $a = 1 + \mathrm{i}$ et $b = 2$, et on considère l'application $g = f_{1+\mathrm{i},2}$ qui est définie sur $\mathbb{C}$ en posant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad g(z) = (1 + \mathrm{i})z + 2$$

Montrer que l'application g est une bijection, et déterminer sa bijection réciproque.

2/ **Généralisation — Le groupe des similitudes directes**.

a/ Justifier brièvement que $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$.

b/ Soient (a, b) et $(a', b') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Pour tout complexe z, calculer $(f_{a',b'} \circ f_{a,b})(z)$. En déduire que l'application $f_{a',b'} \circ f_{a,b}$ est une similitude directe.

c/ Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. A l'aide des deux questions précédentes, établir que $f_{a,b}$ est une bijection, et que sa bijection réciproque est une similitude directe.

3/ **Les similitudes directes à centre**.

Dans toute cette question, on considère un couple $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

Un nombre complexe z_0 est appelé **point fixe** de la similitude $f_{a,b}$ si : $f_{a,b}(z_0) = z_0$.

a/ Etablir que $f_{a,b}$ possède un unique point fixe z_0, que l'on exprimera en fonction de a et b.

b/ Avec les notations de la question précédente, établir que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f_{a,b}(z) = a\,(z - z_0) + z_0$$

c/ Toujours avec les notations des questions précédentes, le complexe z_0 est appelé **centre** de la similitude directe $f_{a,b}$.

Montrer que deux similitudes directes ayant même centre commutent.