

Chapitre 7

Fonctions circulaires réciproques

7.1 Fonctions à valeurs réelles bijectives

PROPRIÉTÉ 7.1 - Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I , alors f réalise une bijection de I vers $f(I)$.

PREUVE. La surjectivité provient de ce que l'on choisit $f(I)$ comme codomaine, et l'injectivité de la stricte monotonie. ☕

Exemple : la fonction $\exp$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

PROPRIÉTÉ 7.2 - La bijection réciproque d'une fonction strictement croissante (*resp.* décroissante) est strictement croissante (*resp.* décroissante).

PREUVE. On suppose que $f : I \longrightarrow f(I)$ est une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles, bijective et strictement croissante. Montrons que f^{-1} est strictement croissante.

Soient a et b deux réels de $f(I)$ tels que $a < b$.

Supposons $f^{-1}(a) \geq f^{-1}(b)$ (♠).

Alors, f étant croissante, on en déduit que : $f(f^{-1}(a)) \geq f(f^{-1}(b))$, soit $a \geq b$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse initiale ($a < b$). Ceci implique que l'assertion (♠) est fausse.

Par suite $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$. En résumé, on a établi l'implication : $\forall (a, b) \in (f(I))^2, (a < b) \implies (f^{-1}(a) < f^{-1}(b))$.

Conclusion : sous les hypothèses de l'énoncé, si f est strictement croissante, alors f^{-1} est strictement croissante.

La propriété "si f est bijective et strictement décroissante, alors f^{-1} est strictement décroissante" se déduit du raisonnement précédent, en modifiant un seul signe... ☕

PROPRIÉTÉ 7.3 - La bijection réciproque d'une fonction impaire est impaire.

Remarque : arrêtez-vous deux secondes pour vous demander pourquoi l'énoncé ci-dessus n'a aucune chance de tenir si l'on remplace "impaire" par "paire" !

PREUVE. ► Montrons que si f est impaire, alors f^{-1} l'est.

On suppose que $f : I \longrightarrow f(I)$ est une bijection impaire (en particulier, I est symétrique par rapport à zéro).

► Pour établir l'imparité de f^{-1} , on commence par établir que $f(I)$ est symétrique par rapport à zéro.

Si y est dans $f(I)$, alors il existe un élément x de I tel que : $y = f(x)$. D'où $-y = -f(x) = f(-x)$ (f étant impaire). Or $(-x) \in I$, puisque $x \in I$ et I est supposé symétrique par rapport à zéro. Donc $-y \in f(I)$.

En résumé, on a établi l'implication : $(y \in f(I)) \implies (-y \in f(I))$.

D'où $f(I)$ est symétrique par rapport à zéro.

► Ceci fait, il ne reste plus qu'à vérifier que : $\forall y \in f(I), f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.

Soit $y \in f(I)$. D'une part : $f(f^{-1}(-y)) = -y$ (♠) puisque $f \circ f^{-1} = \text{id}_{f(I)}$.

D'autre part : $f(-f^{-1}(y)) = -f(f^{-1}(y))$ (f étant impaire). D'où : $f(-f^{-1}(y)) = -y$ (♣).

D'après (♠) et (♣) : $f(-f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(-y))$. Puisque f est injective (car bijective), on en déduit que : $-f^{-1}(y) = f^{-1}(-y)$.

Conclusion. Sous les hypothèses de l'énoncé, si f est impaire, alors f^{-1} est impaire. ☕

PROPRIÉTÉ 7.4 - Soit $f : I \longrightarrow f(I)$ une fonction bijective définie sur un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et :

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

PREUVE. Prouvons la propriété. Soient f, I et a comme dans l'énoncé. La fonction $f^{-1} \circ f$ est dérivable sur I , puisque pour tout réel $x \in I$ on a : $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. Il s'ensuit en particulier que : $(f^{-1} \circ f)'(a) = 1$.

Par ailleurs, en admettant la dérivabilité de f^{-1} en $f(a)$, on a : $(f^{-1} \circ f)'(a) = (f^{-1})'(f(a)) \times f'(a)$, en vertu de la propriété donnant la dérivée d'une composée de fonctions dérivables.

On déduit des deux identités précédentes que : $(f^{-1})'(f(a)) \times f'(a) = 1$.

D'où : $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$ (car $f'(a) \neq 0$). ☕

Les 4 propriétés ci-dessus sont des outils fort pratiques pour définir et étudier les réciproques des fonctions trigonométriques ; c'est l'objet du paragraphe suivant.

7.2 Fonctions trigonométriques réciproques

7.2.1 La fonction arccosinus

La fonction cosinus réalise une bijection de $[0; \pi]$ dans $[-1; 1]$; sa bijection réciproque est appelée fonction **arccosinus** et est notée **arccos** (plutôt que $\cos^{-1}$, notation que vous avez sans doute déjà vue sur vos calculatrices).

La fonction arccosinus est “explicitement” donnée par la construction de “ g ” dans le théorème ?? page ?? du chapitre précédent. Précisément :

$$\begin{array}{ll} \text{arccos} : [-1; 1] & \longrightarrow [0; \pi] \\ y & \longmapsto \text{unique solution dans } [0; \pi] \\ & \text{de l'équation } \cos(x) = y \end{array}$$

Il résulte de la définition que (attention aux intervalles !) :

$$[\forall x \in [-1; 1], \cos(\arccos(x)) = x] \wedge [\forall x \in [0; \pi], \arccos(\cos(x)) = x]$$

Quelques valeurs : $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$; $\arccos(1) = 0$; $\arccos(-1) = \pi$; $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\pi}{12}$; mais **attention** : $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$.

PROPRIÉTÉ 7.5 - La fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

PREUVE. La fonction arccos est la bijection réciproque de la fonction cos restreinte à $[0, \pi]$. Puisque cette dernière est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, arccos est strictement décroissante sur $[-1, 1]$ en vertu de la propriété 7.2 (qui affirme qu’une bijection strictement monotone et sa bijection réciproque ont le même sens de variation. ☕)

PROPRIÉTÉ 7.6 - La fonction arccos est dérivable sur $] -1, 1[$, et : $\forall x \in] -1, 1[$, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

PREUVE. Soit x un réel de $] -1, 1[$. Il existe un unique réel $a \in]0, \pi[$ tel que : $x = \cos(a)$. Puisque la fonction cos est dérivable en a , et que sa dérivée (-sin) ne s’annule pas en a ,¹ il résulte de la propriété 7.4 que la fonction arccos est dérivable en $\cos(a)$ et que :

$$\arccos'(\cos(a)) = \frac{-1}{\sin(a)}$$

Or d’après la relation fondamentale de la trigonométrie : $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$, d’où : $|\sin(a)| = \sqrt{1 - \cos^2(a)}$. En observant que $\sin(a)$ est positif (puisque $a \in]0, \pi[$), on en déduit que : $\sin(a) = \sqrt{1 - \cos^2(a)}$. Ainsi :

$$\arccos'(\cos(a)) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(a)}}$$

En revenant à notre variable initiale, on a donc : $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. $-\sin(a) \neq 0$ puisque $0 < a < \pi$.

Le réel x étant un réel arbitraire de $] -1, 1[$ dans le raisonnement précédent, on a établi que la fonction arccos est dérivable sur $] -1, 1[$, et que : $\forall x \in] -1, 1[$, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$. ☕

Remarque. La propriété précédente ne dit rien sur la dérivabilité (ou non) de la fonction arccos en ± 1 . De fait, arccos n'est dérivable ni en -1 , ni en 1 . Une preuve de cette affirmation repose sur une propriété que nous verrons ultérieurement (le théorème des accroissements finis). Un argument (qui n'est pas une preuve rigoureuse) graphique consiste à observer que la courbe représentative de la fonction arccos possède aux points d'abscisses -1 et 1 des demi-tangentes verticales.

COROLLAIRE 7.1 - (DL à l'ordre 1 en 0 de arccos).

$$\forall h \in] -1, 1[, \arccos(h) = \frac{\pi}{2} - h + h\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \arccos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

PREUVE. Conséquence immédiate du théorème ?? page ?? et de la propriété précédente. ☕

7.2.2 La fonction arcsinus

La fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2; \pi/2]$ dans $[-1; 1]$; sa bijection réciproque est appelée fonction **arcsinus** et est notée **arcsin**. La fonction arcsinus est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \arcsin : [-1; 1] & \longrightarrow & [-\pi/2; \pi/2] \\ y & \longmapsto & \text{unique solution dans } [-\pi/2; \pi/2] \\ & & \text{de l'équation } \sin(x) = y \end{array}$$

Il résulte de la définition que (re-attention aux intervalles!) :

$$[\forall x \in [-1; 1], \sin(\arcsin(x)) = x] \wedge [\forall x \in [-\pi/2; \pi/2], \arcsin(\sin(x)) = x]$$

Quelques valeurs : $\arcsin(0) = 0$; $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$; $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$; $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\pi}{12}$; mais attention : $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$.

PROPRIÉTÉ 7.7 - La fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$.

PREUVE. La fonction arcsin est la bijection réciproque de la fonction sin restreinte à $[-\pi/2; \pi/2]$. Puisque cette dernière est strictement croissante sur $[-\pi/2; \pi/2]$, arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$ en vertu de la propriété 7.2. ☕

PROPRIÉTÉ 7.8 - La fonction arcsin est impaire.

PREUVE. La fonction arcsin est la bijection réciproque de la fonction sin restreinte à $[-\pi/2; \pi/2]$. Puisque cette dernière est impaire, arcsin est impaire en vertu de la propriété 7.3. ☕

PROPRIÉTÉ 7.9 - La fonction arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$, et : $\forall x \in] -1, 1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

PREUVE. Soit x un réel de $] -1, 1[$. Il existe un unique réel $a \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ tel que : $x = \sin(a)$. Puisque la fonction sin est dérivable en a , et que sa dérivée (cos) ne s'annule pas en a , il résulte de la propriété 7.4 que la fonction arcsin est dérivable en $\sin(a)$ et que :

$$\arcsin'(\sin(a)) = \frac{1}{\cos(a)}$$

Or d'après la relation fondamentale de la trigonométrie : $\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a)$, d'où : $|\cos(a)| = \sqrt{1 - \sin^2(a)}$. En observant que $\cos(a)$ est positif (puisque $a \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$), on en déduit que : $\cos(a) = \sqrt{1 - \sin^2(a)}$. Ainsi :

$$\arcsin'(\sin(a)) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(a)}}$$

En revenant à notre variable initiale, on a donc : $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Le réel x étant un réel arbitraire de $] -1, 1[$ dans le raisonnement précédent, on a établi que la fonction arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$, et que : $\forall x \in] -1, 1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. ☕

Remarque. La propriété précédente ne dit rien sur la dérivabilité (ou non) de la fonction arcsin en ± 1 . De nouveau, nous pourrions prouver que la fonction arcsin n'est dérivable ni en -1 , ni en 1 .

COROLLAIRE 7.2 - (DL à l'ordre 1 en 0 de arcsin).

$$\forall h \in] -1, 1[, \arcsin(h) = h + h\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

PREUVE. Conséquence immédiate du théorème ?? page ?? et de la propriété précédente. ☕

Remarque. On peut observer (ce serait même un crime de ne pas le faire !) que les fonctions arccos et arcsin ont la même dérivée, au signe près. Une application de cette observation est la question standard suivante.

EXERCICE CLASSIQUE. Montrer que : $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

PREUVE. Notons f la fonction définie en posant : $\forall x \in [-1, 1], f(x) = \arccos(x) + \arcsin(x)$. La fonction f est dérivable sur $] -1, 1[$, et : $\forall x \in] -1, 1[, f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. On en déduit que f est constante sur $] -1, 1[$. Pour déterminer la valeur de cette constante, il suffit de calculer (par exemple) $f(0)$.² Par définition : $f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}$.

On a donc établi que : $\forall x \in] -1, 1[, f(x) = \frac{\pi}{2}$, càd : $\forall x \in] -1, 1[, \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

Pour “fermer les crochets”, on peut observer que :

$$f(1) = \arccos(1) + \arcsin(1) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad f(-1) = \arccos(-1) + \arcsin(-1) = \pi + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi : $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ ☕

7.2.3 La fonction arctangente

La fonction tangente réalise une bijection de $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$; sa bijection réciproque est appelée **arctangente** et est notée **arctan** (plutôt que $\tan^{-1}$).

La fonction arctangente est donnée par :

$$\begin{array}{ll} \arctan : \mathbb{R} & \longrightarrow \quad] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ y & \longmapsto \text{unique solution dans }] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ & \text{de l'équation } \tan(x) = y \end{array}$$

Il résulte de la définition que (re-re-attention aux intervalles!) :

$$[\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x] \wedge \left[\forall x \in] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(x)) = x \right]$$

Quelques valeurs : $\arctan(0) = 0$; $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$; $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$; $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$;

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\pi}{12}; \text{ mais, attention (ce n'est plus une surprise) : } \arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

PROPRIÉTÉ 7.10 - La fonction arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

PREUVE. La fonction arctan est la bijection réciproque de la fonction $\tan$ restreinte à $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Puisque cette dernière est strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en vertu de la propriété 7.2. ☕

2. Ou l'image par f de n'importe quel réel appartenant à $] -1, 1[$.

PROPRIÉTÉ 7.11 - La fonction arctan est impaire.

PREUVE. La fonction arctan est la bijection réciproque de la fonction tan restreinte à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Puisque cette dernière est impaire, arctan est impaire en vertu de la propriété 7.3. ☕

PROPRIÉTÉ 7.12 - La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

PREUVE. Soit x un réel. Il existe un unique réel $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $x = \tan(a)$. Puisque la fonction tan est dérivable en a , et que sa dérivée $(1+\tan^2)$ ne s'annule pas en a , il résulte de la propriété 7.4 que la fonction arctan est dérivable en $\tan(a)$ et que :

$$\arctan'(\tan(a)) = \frac{1}{1+\tan^2(a)}$$

En revenant à notre variable initiale, on a donc : $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Le réel x étant arbitraire dans le raisonnement précédent, on a établi que la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que : $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. ☕

COROLLAIRE 7.3 - (DL à l'ordre 1 en 0 de arctan).

$$\forall h \in \mathbb{R}, \arctan(h) = h + h\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

PREUVE. Conséquence immédiate du théorème ?? page ?? et de la propriété précédente. ☕

On achève ce paragraphe consacré à la fonction arctangente avec une propriété remarquable de cette dernière.

EXERCICE CLASSIQUE. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x)$

où $\operatorname{sgn}(x)$ est égal à 1 si $x > 0$, et égal à -1 si $x < 0$.

PREUVE. Notons f la fonction définie en posant : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (théorèmes généraux), et : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$. On en déduit que f est constante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Pour déterminer la valeur de ces constante, il suffit de calculer (par exemple) $f(1)$ et $f(-1)$.

Par définition : $f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Et par “imparité” : $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

Ainsi : $\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

et

$\forall x < 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$



7.2.4 Bilan sur les fonctions circulaires réciproques

► La fonction arccosinus (arccos).

arccos est **définie** sur $[-1; 1]$ par : $\text{arccos} : [-1; 1] \longrightarrow [0; \pi]$

$$x \longmapsto y$$

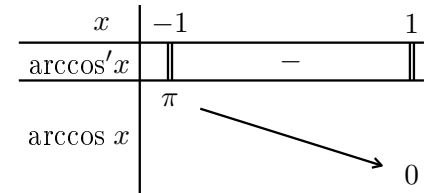
(où y : unique solution dans $[0; \pi]$ de $\cos(y) = x$).

La fonction arccos est **dérivable** (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur $] -1; 1[$, et **n'est pas dérivable** en 1, ni en -1 .

De plus : $\forall x \in] -1; 1[, \text{arccos}'x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1; 1]$.

La tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_{\text{arccos}}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \frac{\pi}{2} - x$, et $\mathcal{C}_{\text{arccos}}$ est située au-dessus (*resp.* en-dessous) de cette tangente sur $[-1; 0]$ (*resp.* sur $[0; 1]$).



► La fonction arcsinus (arcsin).

arcsin est **définie** sur $[-1; 1]$ par : $\text{arcsin} : [-1; 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$$x \longmapsto y$$

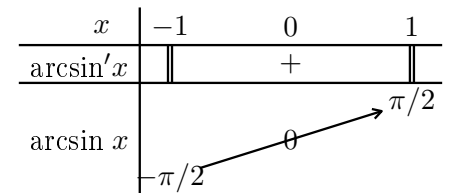
(où y : unique solution dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ de $\sin(y) = x$).

La fonction arcsin est **impair**, **dérivable** (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur $] -1; 1[$, et **n'est pas dérivable** en 1, ni en -1 .

De plus : $\forall x \in] -1; 1[, \text{arcsin}'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1; 1]$.

La tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_{\text{arcsin}}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$, et $\mathcal{C}_{\text{arcsin}}$ est située au-dessus (*resp.* en-dessous) de cette tangente sur $[0; 1]$ (*resp.* sur $[-1; 0]$).



► La fonction arctangente (arctan).

arctan est **définie** sur $\mathbb{R}$ par : $\text{arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

$$x \longmapsto y$$

(où y : unique solution dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ de $\tan(y) = x$).

La fonction arctan est **impaire**, **dérivable** (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$.

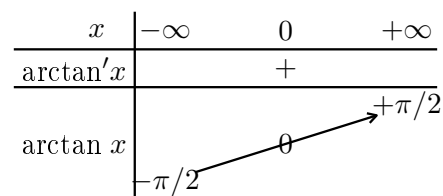
De plus : $\forall x \in \mathbb{R}, \text{arctan}'x = \frac{1}{1+x^2}$.

La fonction arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus elle est **bornée** (entre $-\pi/2$ et $\pi/2$).

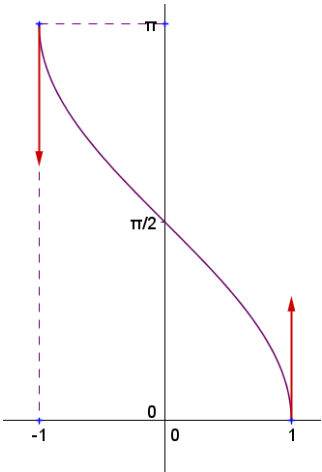
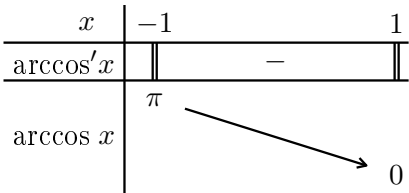
La tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_{\text{arctan}}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$, et $\mathcal{C}_{\text{arctan}}$ est située au-dessus (*resp.* en-dessous) de cette tangente sur $\mathbb{R}_-$ (*resp.* sur $\mathbb{R}_+$).

La courbe $\mathcal{C}_{\text{arctan}}$ admet au voisinage de $+\infty$ (*resp.* de $-\infty$) une asymptote horizontale d'équation $y = \pi/2$ (*resp.* $y = -\pi/2$).

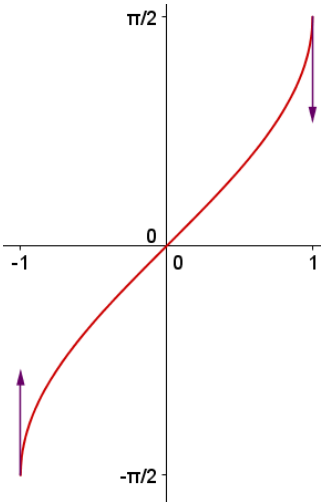
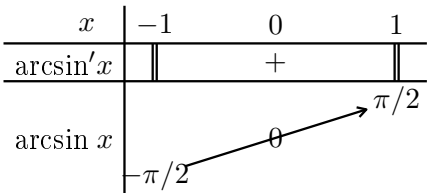


► On achève ce paragraphe par les courbes représentatives des fonctions circulaires réciproques.

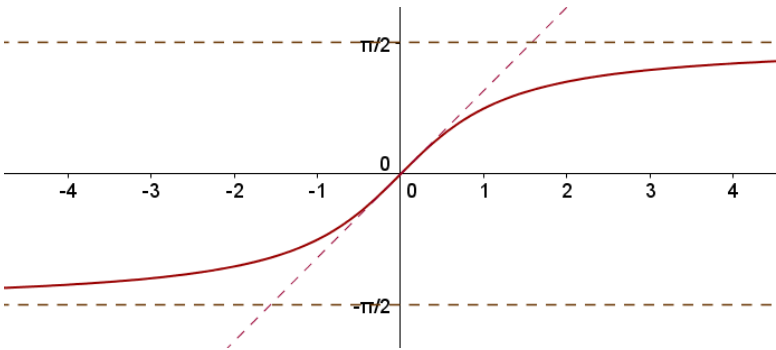
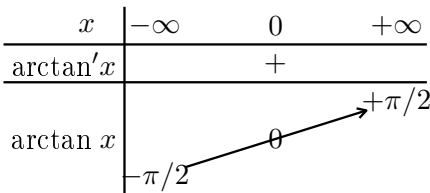
ARCCOSINUS (ARCCOS)



ARCSINUS (ARCSIN)



ARCTANGENTE (ARCTAN)



7.3 Epilogue - Exercice classique : $\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{4}\right) = \arctan\left(\frac{7}{11}\right)$

Montrons que : $\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{4}\right) = \arctan\left(\frac{7}{11}\right)$.

En utilisant la formule d'addition pour la fonction tangente (et le fait que $\tan \circ \arctan = \text{id}_{\mathbb{R}}$), on obtient :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}} = \frac{7/12}{11/12}.$$

D'où : $\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{7}{11}$.

On a donc : $\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \tan\left(\arctan\left(\frac{7}{11}\right)\right)$.

Par suite : $\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{4}\right) = \arctan\left(\frac{7}{11}\right) \quad [\pi]$.

On peut conclure en notant³ que $\arctan(7/11) \in [0, \pi/2[$, et que $\arctan(1/3)$ et $\arctan(1/4)$ sont dans $[0, \pi/4[$.

Par suite : $\boxed{\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{4}\right) = \arctan\left(\frac{7}{11}\right)}$

3. Comme dans la récente question de cours.