

COLLE 7 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N°1 — **Pur cours** : tout sur arccos, arcsin ou arctan : définition, sens de variation, dérivabilité, dérivée, DL1 en 0, tableau de variation, valeurs aux bornes de l'ensemble de définition, allure de la courbe.

QUESTION DE COURS N°2 — **Exercice**. Etablir que : $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$

D'une part $\tan(\pi/4) = 1$ et d'autre part d'après la formule d'addition :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{1 - \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)}$$

$$\text{D'où : } \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{5}{6}\right)} = 1$$

On déduit de ces calculs que : $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4} \quad [\pi]$

En outre, puisque $1/2$ et $1/3$ appartiennent tous deux à l'intervalle $[0; 1[$ et que la fonction arctangente est strictement croissante, les réels $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ sont compris entre $\arctan(0)$ (c-à-d 0) et $\arctan(1)$ (c-à-d $\pi/4$). Il s'ensuit

que leur somme est dans l'intervalle $[0; \pi/2[$. Par conséquent : $\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$

QUESTION DE COURS N°3 — **Propriété**. Soit $f : I \longrightarrow f(I)$ une fonction bijective définie sur un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et : $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$ **ET**

Application : formule donnant la dérivée de arctan sur $\mathbb{R}$.

Prouvons la propriété. Soient f , I et a comme dans l'énoncé. La fonction $f^{-1} \circ f$ est dérivable sur I , puisque pour tout réel $x \in I$ on a : $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. Il s'ensuit en particulier que : $(f^{-1} \circ f)'(a) = 1$.

Par ailleurs, en admettant la dérivabilité de f^{-1} en $f(a)$, on a : $(f^{-1} \circ f)'(a) = (f^{-1})'(f(a)) \times f'(a)$, en vertu de la propriété donnant la dérivée d'une composée de fonctions dérivables.

On déduit des deux identités précédentes que : $(f^{-1})(f(a)) \times f'(a) = 1$, d'où : $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$ (car $f'(a) \neq 0$).

Application. La fonction tangente réalise une bijection de $] -\pi/2; \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$, et sa réciproque est la fonction arctan.

Soit x un réel quelconque. Il existe un unique réel $y \in] -\pi/2; \pi/2[$ tel que $\tan(y) = x$. Puisque la fonction tangente est dérivable sur $] -\pi/2; \pi/2[$, et que sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle*, on déduit de la propriété précédente que la fonction arctangente est dérivable en $\tan(y)$ et :

$$\arctan'(\tan(y)) = \frac{1}{\tan'(y)} \quad \text{soit : } \arctan'(\tan(y)) = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} \quad \text{soit encore : } \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Le raisonnement précédent étant valide pour un réel x arbitraire, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

*. Pour mémoire, elle est strictement positive puisque $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

QUESTION DE COURS N°4 — **Exercice.** Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \times \operatorname{sgn}(x)$

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. D'après les théorèmes généraux[†] sur la dérivabilité, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En outre : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+(1/x^2)} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+1/x^2} = 0$.

Il s'ensuit que f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme de plus : $f(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$, on peut conclure :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Un raisonnement analogue permet d'affirmer que f est constante sur $\mathbb{R}_-^*$, et que : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Les deux résultats établis peuvent être synthétisés en une seule identité : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \times \operatorname{sgn}(x)$.

QUESTION DE COURS N°5 — **Propriété** : si $f : I \rightarrow f(I)$ est strictement croissante (*resp.* décroissante) et bijective, alors f^{-1} est strictement croissante (*resp.* décroissante).

On suppose que $f : I \rightarrow f(I)$ est une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles, bijective et strictement croissante. Montrons que f^{-1} est strictement croissante.

Soient a et b deux réels de $f(I)$ tels que $a < b$.

Supposons $f^{-1}(a) \geq f^{-1}(b)$ ($\spadesuit$).

Alors, f étant croissante, on en déduit que : $f(f^{-1}(a)) \geq f(f^{-1}(b))$, soit $a \geq b$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse initiale ($a < b$). Ceci implique que l'assertion ($\spadesuit$) est fausse.

Par suite $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$. En résumé, on a établi l'implication : $\forall (a, b) \in (f(I))^2, (a < b) \implies (f^{-1}(a) < f^{-1}(b))$.

Conclusion : sous les hypothèses de l'énoncé, si f est strictement croissante, alors f^{-1} est strictement croissante.

La propriété "si f est bijective et strictement décroissante, alors f^{-1} est strictement décroissante" se déduit du raisonnement précédent, en modifiant un seul signe...

QUESTION DE COURS N°6 — **Propriété** : si $f : I \rightarrow f(I)$ est impaire et bijective, alors f^{-1} est impaire.

► Montrons que si f est impaire, alors f^{-1} l'est.

On suppose que $f : I \rightarrow f(I)$ est une bijection impaire (en particulier, I est symétrique par rapport à zéro).

► Pour établir l'imparité de f^{-1} , on commence par établir que $f(I)$ est symétrique par rapport à zéro.

Si y est dans $f(I)$, alors il existe un élément x de I tel que : $y = f(x)$. D'où $-y = -f(x) = f(-x)$ (f étant impaire). Or $(-x) \in I$, puisque $x \in I$ et I est supposé symétrique par rapport à zéro. Donc $-y \in f(I)$.

En résumé, on a établi l'implication : $(y \in f(I)) \implies (-y \in f(I))$. D'où $f(I)$ est symétrique par rapport à zéro.

► Ceci fait, il ne reste plus qu'à vérifier que : $\forall y \in f(I), f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.

Soit $y \in f(I)$. D'une part : $f(f^{-1}(-y)) = -y$ ($\spadesuit$) puisque $f \circ f^{-1} = \operatorname{id}_{f(I)}$.

D'autre part : $f(-f^{-1}(y)) = -f(f^{-1}(y))$ (f étant impaire). D'où : $f(-f^{-1}(y)) = -y$ ($\clubsuit$).

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) : $f(-f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(-y))$. Puisque f est injective (car bijective), on en déduit que : $-f^{-1}(y) = f^{-1}(-y)$.

Conclusion. Sous les hypothèses de l'énoncé, si f est impaire, alors f^{-1} est impaire.

QUESTION DE COURS N°7 — **Exercice.** Etablir que $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

Posons : $\forall x \in [-1, 1], f(x) = \arccos(x) + \arcsin(x)$. La fonction f est dérivable sur $] -1, 1[$, et : $\forall x \in [-1, 1], f'(x) = 0$. Il s'ensuit que f est constante sur $] -1, 1[$, égale (par exemple) à $f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}$.

On a donc établi que : $\forall x \in] -1, 1[, \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

Il ne reste plus qu'à fermer les crochets. Pour ce faire, il suffit d'observer que f est continue sur $[-1, 1]$, et on a donc :

$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ (et $f(-1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$). D'après ce qui précède, on en déduit que : $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

[†]. Il s'agit des énoncés affirmant essentiellement que la somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions dérivables l'est encore.