MPSI – Colle 7 (14 au 18 novembre 2022) : Applications - Fonctions trigonométriques réciproques

Chapitre 6 : Applications

1 – Définitions et premiers exemples

2 – Applications injectives, surjectives, bijectives

3 – Bijections réciproques

Chapitre 7 : Fonctions circulaires réciproques

1 – Fonctions à valeurs réelles bijectives

Propriété. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I vers $f(I)$.

Exemple : la fonction exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété. La bijection réciproque d'une fonction strictement croissante (*resp.* décroissante) est strictement croissante (*resp.* décroissante).

Propriété. La bijection réciproque d'une fonction impaire est impaire.

Propriété. Soit $f : I \longrightarrow f(I)$ une fonction bijective définie sur un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et :

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \qquad \left(\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}\right)$$

2 – Fonctions circulaires réciproques

a/ La fonction cosinus réalise une bijection de $[0;\pi]$ dans $[-1;1]$; sa bijection réciproque est appelée fonction **arccosinus** et est notée **arccos** (plutôt que $\cos^{-1}$, notation que vous avez sans doute déjà vue sur vos calculatrices).

La fonction arccosinus est "explicitement" donnée par la construction de "g" dans le théorème énoncé au début du présent paragraphe. Précisément :

$$\begin{array}{llll} \arccos : & [-1;1] & \longrightarrow & [0;\pi] \\ & y & \longmapsto & \text{unique solution dans } [0;\pi] \\ & & & \text{de l'équation } \cos(x) = y \end{array}$$

Il résulte de la définition que (attention aux intervalles !) :

$$[\forall\, x \in [-1;1]\,,\ \cos(\arccos(x)) = x] \wedge [\forall\, x \in [0;\pi]\,,\ \arccos(\cos(x)) = x]$$

<u>Quelques valeurs</u> : $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$; $\arccos(1) = 0$; $\arccos(-1) = \pi$; $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \dfrac{\pi}{12}$; mais attention : $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{\pi}{2}$

ii/ La fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2;\pi/2]$ dans $[-1;1]$; sa bijection réciproque est appelée fonction **arcsinus** et est notée **arcsin**. La fonction arcsinus est donnée par :

$$\begin{array}{llll} \arcsin : & [-1;1] & \longrightarrow & [-\pi/2;\pi/2] \\ & y & \longmapsto & \text{unique solution dans } [-\pi/2;\pi/2] \\ & & & \text{de l'équation } \sin(x) = y \end{array}$$

Il résulte de la définition que (re-attention aux intervalles !) :

$$[\forall\, x \in [-1;1]\,,\ \sin(\arcsin(x)) = x] \wedge [\forall\, x \in [-\pi/2;\pi/2]\,,\ \arcsin(\sin(x)) = x]$$

<u>Quelques valeurs</u> : $\arcsin(0) = 0$; $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$; $\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$; $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \dfrac{\pi}{12}$; mais attention : $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = \dfrac{\pi}{3}$

iii/ La fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$; sa bijection réciproque est appelée **arctangente** et est notée **arctan** (plutôt que $\tan^{-1}$).

La fonction arctangente est donnée par :

$$\begin{array}{llll} \arctan : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\\ & y & \longmapsto & \text{unique solution dans } \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\\ & & & \text{de l'équation } \tan(x) = y \end{array}$$

Il résulte de la définition que (re-re-attention aux intervalles !) :

$$[\forall\, x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan(x)) = x] \wedge \left[\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\,,\ \arctan(\tan(x)) = x\right]$$

<u>Quelques valeurs</u> : $\arctan(0) = 0$; $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$; $\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$; $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$; $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \dfrac{\pi}{12}$; mais, attention (ce n'est plus du tout une surprise) : $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Dérivabilité de arccos, arcsin et arctan

- arccos est dérivable sur $]-1;1[$, et
$$\forall x \in \ ]-1;1[\ ,\ \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
- arcsin est dérivable sur $]-1;1[$, et
$$\forall x \in \ ]-1;1[\ ,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
- arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Questions de cours — Version "A"

- **Pur cours** : tout sur l'une des fonctions arccos, arcsin ou arctan : définition, sens de variation, dérivabilité, dérivée, DL à l'ordre 1 en 0, tableau de variation, valeurs aux bornes de l'ensemble de définition, allure de la courbe.

- **Propriété**. La bijection réciproque d'une fonction strictement croissante (*resp.* décroissante) est strictement croissante (*resp.* décroissante).

- **Propriété**. La bijection réciproque d'une fonction impaire est impaire.

- **Exercice**. Etablir que $\forall x \in [-1,1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$

- **Propriété**. Soit $f : I \longrightarrow f(I)$ une fonction bijective définie sur un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et : $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$ **ET Application** : formule donnant la dérivée de arctan sur $\mathbb{R}$.

- **Exercice**. Etablir que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2} \times \operatorname{sgn}(x)$ où $\operatorname{sgn}(x)$ est le signe de x, càd $\operatorname{sgn}(x) = 1$ pour $x > 0$, et $\operatorname{sgn}(x) = 1$ pour $x < 0$.

- **Exercice**. Etablir que : $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

Objectifs de la semaine :

- Savoir établir qu'une **fonction réalise une bijection** entre deux intervalles de $\mathbb{R}$ (continuité, stricte monotonie, TVI).

- Connaître les fonctions **arccos, arcsin et arctan** : ce sont de nouvelles fonctions usuelles.

- Avoir compris le principe des **"exercices classiques"** vus en clôture du chapitre 7.