

COLLE 8 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N°1 — Propriété. Positivité de l'intégrale : soient a et b deux réels, avec $a \leq b$, et $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Sous les hypothèses de l'énoncé, la fonction f est continue et positive sur le segment $[a, b]$: à ce titre, elle admet une primitive F (th fondamental de l'intégration) sur $[a, b]$, et F est croissante sur $[a, b]$ (car F est dérivable et $F' = f \geq 0$).

On en déduit que $\int_a^b f = F(b) - F(a) \geq 0$, d'où la conclusion.

QUESTION DE COURS N°2 — Propriété. Croissance de l'intégrale : soient a et b deux réels, avec $a \leq b$, et $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Si $f \geq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$.

Sous les hypothèses de l'énoncé, la fonction $f - g$ est continue et positive sur le segment $[a, b]$. Par positivité de l'intégrale, on a donc : $\int_a^b (f - g) \geq 0$. Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que : $\int_a^b f - \int_a^b g \geq 0$, d'où la conclusion.

QUESTION DE COURS N°3 — Propriété. Relation de Chasles pour les intégrales.

Soient a et b deux réels, avec $a \leq b$, et $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Alors pour tout $c \in [a, b]$ on a : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Puisque f est continue sur le segment $[a, b]$, elle admet une primitive F sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_c^b f(t) dt + \int_a^c f(t) dt, \text{ cqfd.}$$

QUESTION DE COURS N°4 — Propriété. Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}_1$ sur un intervalle I , et soient a et b deux réels dans I . Alors uv est dérivable sur I et :

$\forall x \in I, (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Par intégration entre a et b (légitime car u, v, u' et v' sont continues), on en déduit que : $\int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$ d'où

$$\forall (u, v) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), \int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Remarque : cette méthode peut en particulier être appliquée au calcul de primitives :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), \int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx (+cste)$$

QUESTIONS DE COURS N°5 ET 6 — Exercices. Primitives de $\ln$, arcsin, arccos et arctan

► **Application 1.** $\int \ln(x) dx = \int 1 \times \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \times \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - x$

La fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque : les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui rend légitime cette IPP.

► **Application 2.** $\int \arctan(x) dx = \int 1 \times \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan(x) - \ln(\sqrt{1+x^2})$

La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x \arctan(x) - \ln(\sqrt{1+x^2})$ est une primitive de la fonction $\arctan$ sur $\mathbb{R}$.

► **Application 3.**

$$\int \arccos(x) dx = \int 1 \times \arccos(x) dx = x \arccos(x) + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$$

La fonction $x \in]-1, 1[\mapsto x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$ est une primitive de la fonction $\arccos$ sur $] -1, 1[$.

► **Application 4.**

$$\int \arcsin(x) dx = \int 1 \times \arcsin(x) dx = x \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$

La fonction $x \in]-1, 1[\mapsto x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$ est une primitive de la fonction $\arcsin$ sur $] -1, 1[$.

QUESTION DE COURS N°7 — **Exercice.** $\ln(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$

Soit n un entier naturel, et x un réel différent de (-1) . On a : $\frac{1}{1+x} = \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \right] + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$

On en déduit que :

$$\frac{1}{1+x} = \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \right] + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

En intégrant terme à terme cette relation sur l'intervalle $[0; 1]$ on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx &= \int_0^1 \left(\left[\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \right] + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x} \right) dx \\ \iff [\ln(1+x)]_0^1 &= \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \right] dx + \int_0^1 (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ \iff \ln 2 &= \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^k dx \right] + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \quad (\text{par linéarité de l'intégrale, bis}) \\ \iff \ln 2 &= \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 \right] + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \\ \iff \ln 2 &= \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right] + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \end{aligned}$$

D'où : $\left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right] = \ln 2 - (-1)^{n+1} a_n \quad (\spadesuit)$ en ayant posé : $a_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$.

Observons à présent que pour tout x dans $[0; 1]$, on a : $1+x \geq 1$. Il découle de cette remarquable observation que : $\forall x \in [0; 1], 0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}$. En intégrant cet encadrement sur $[0; 1]$, on obtient alors :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx \text{ d'où : } 0 \leq a_n \leq \frac{1}{n+2}$$

On déduit de cet encadrement et du théorème des gendarmes que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \quad (\clubsuit)$.

Conclusion. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right] = \ln 2$.

Remarque. Plus tard dans l'année (sans doute au mois de juin), nous interpréterons cette conclusion en disant que la **série de terme général** $\frac{(-1)^k}{k+1}$ **est convergente, et a pour somme** $\ln 2$, et nous écrirons "simplement" : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$