

Chapitre 8 : Primitives et intégrales

1 – Primitives (généralités)

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles. Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Propriété. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles. Deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante. Explicitement, si F et G sont deux primitives de f sur I , alors : $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, F(x) - G(x) = K$.

Propriété. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs réelles. Si F et G désignent des primitives respectives de f et g sur I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I ; λF est une primitive de λf (pour tout réel λ) sur I . Il revient au même de dire que pour tout couple de réels (λ, μ) , la fonction $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I .

Théorème. Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I (donc une infinité de primitives sur I).

Explicitement, la fonction $x \in I \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur I s'annulant en a (avec $a \in I$).

2 – Primitives usuelles Voir formulaire.

Cas particuliers – Primitives et composées

- a) Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln |u|$;
- b) Une primitive de $u'e^u$ est e^u ;
- c) Une primitive de $u'u^\alpha$ est $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$).

3 – Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Définition. Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. L'intégrale de f sur $[a, b]$ est le réel : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$, où F désigne une primitive de f sur $[a, b]$.

Propriétés des intégrales. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.

- 1) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$ (**linéarité**)
- 2) $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \mu \int_c^b f(t) dt$ (**relation de Chasles**)

$$3) [f \text{ positive sur } [a, b]] \implies \left[\int_a^b f(t) dt \geq 0 \right] \text{ (positivité)}$$

$$4) [f \leq g \text{ sur } [a, b]] \implies \left[\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt \right] \text{ (croissance)}$$

$$\text{Exemple d'application : } \ln(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$$

4 – Intégration par parties

Théorème - Intégration par parties. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$. Alors : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$.

Pour le calcul des primitives : une primitive de $u'v$ est $uv - \int u'v$.

Exemples d'applications directes : calcul des primitives de $\ln$, $\arctan$, $\arccos$ et $\arcsin$.

5 – Changement de variable

Propriété. (changement de variable) : soit f une fonction continue et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, toutes deux définies sur des intervalles adéquats. Alors : $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int f(x) dx$

La preuve de cette formule repose sur l'intégration terme à terme de la formule donnant la dérivée d'une composée.

Applications :

- une primitive de $\frac{1}{\cosh}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 2 \arctan(e^x)$ (poser $u = e^x$) ;
- une primitive de $\frac{1}{\sinh}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$ (poser $u = e^x$) ;
- une primitive de $1/\cos$ sur $[0, \pi/3]$ (par exemple, ou plus généralement sur tout intervalle ne contenant aucune valeur d'annulation de $\cos$) est

$$x \mapsto \ln \left| \frac{1 + \tan(x/2)}{1 - \tan(x/2)} \right| \quad (\text{poser } u = \tan(x/2))$$

- soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$ est

$$x \mapsto \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{poser } u = \frac{x}{a})$$

QUESTIONS DE COURS

- **Propriété.** Positivité de l'intégrale.
- **Propriété.** Croissance de l'intégrale.
- **Propriété.** Relation de Chasles.

➤ **Propriété.** Formule d'intégration par parties.

➤ **Exercice.** Primitive de arctan et de arcsin.

➤ **Exercice.** Primitive de ln et de arccos.

➤ **Exercice** (volontaires seulement). $\ln(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$

OBJECTIFS DE LA SEMAINE :

- Maîtriser le **formulaire des primitives usuelles**.
- Savoir reconnaître les trois formes : $u'e^u$, u'/u et $u'u^\alpha$ (pour trouver, par exemple, des primitives respectives de $x \mapsto xe^{x^2}$, $x \mapsto \tan(x)$ et

$$x \mapsto \ln^\alpha(x)/x).$$

➤ Appliquer la formule d'IPP (exemples : primitive de $x \mapsto xe^x$, Wallis...).

➤ Appliquer la formule du changement de variable (exemples : primitive de $x \mapsto \operatorname{ch}^{-1}(x)$, $x \mapsto 1/(x^2 + a^2)$...)