Exercices 8 – Méthodes de calcul intégral

Intégrales et primitives usuelles

Exercice 1. — Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \longmapsto x^4$
2) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$
3) $f : x \longmapsto \sqrt{x}$
4) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
5) $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$
6) $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
7) $f : x \longmapsto \sin(x)\cos(x)$
8) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{4-4x^2}}$
9) $f : x \longmapsto \tan^2(x)$

Exercice 2. — **Zoom sur les primitives de fonctions "de la forme $u'f'(u)$"**

Trois **cas particuliers** remarquables :

1) Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$;
2) Une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est e^u ;
3) Une primitive de $u'u^\alpha$ est $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Applications : déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{x^2}$
2) $f : x \longmapsto \cos(x)\ \sin^{2022}(x)$
3) $f : x \longmapsto (1+x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$
4) $f : x \longmapsto (1-x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$
5) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$
6) $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$
7) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln^\alpha x}$
8) $f : x \longmapsto \tan(x)$
9) $f : x \longmapsto \tan^3(x)$

Exercice 3. — Déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \longmapsto \cos^2(x)$
2) $f : x \longmapsto \tan^2(x)$
3) $f : x \longmapsto \cos^3(x)$
4) $f : x \longmapsto \cos^4(x)$
5) $f : x \longmapsto \sin^4(x)$
6) $f : x \longmapsto \cos^2(x)\sin^2(x)$

Exercice 4. — **(Primitives de fractions rationnelles 1)**. Soit f définie sur $I =]-1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

1) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \neq -1, \quad f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
2) Déduire de ce qui précède une primitive de f sur I.

Exercice 5. — **(Primitives de fractions rationnelles 2)**. Soit f définie sur $I =]1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$.

Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \neq 1 \wedge x \neq -2, \quad f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+2}$. En déduire une primitive de f sur I.

Exercice 6. — **(Primitives de fractions rationnelles 3)**. Déterminer une primitive de f sur I, dans chacun des cas suivants (I étant un intervalle à préciser).

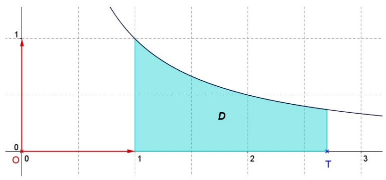
1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-7x+6}$
2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-a}$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$

Exercice 7. — Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x$
2) $I_2 = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$
3) $I_3 = \displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$
4) $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-4}\,\mathrm{d}x$
5) $I_5 = \displaystyle\int_0^8 x\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$
6) $I_6 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$
7) $I_7 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2(x)\,\mathrm{d}x$
8) $I_8 = \displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

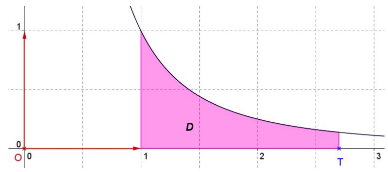
Exercice 8. — Fini ou pas ? Dans les trois questions ci-dessous, T désigne un réel supérieur ou égal à 1.

1) On note $A(T) = \displaystyle\int_1^T \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$



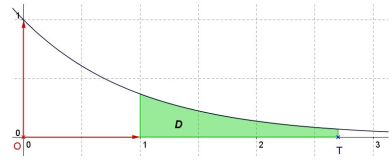
Calculer $A(T)$, puis $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} A(T)$

2) On note $B(T) = \displaystyle\int_1^T \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$



Calculer $B(T)$, puis $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} B(T)$

3) On note $C(T) = \displaystyle\int_1^T \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$



Calculer $C(T)$, puis $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} C(T)$

Intégration par parties

Exercice 9. — Applications directes – Déterminer une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \longmapsto (1-x)\,\mathrm{e}^{2x}$ | 2) $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$ | 3) $f : x \longmapsto x\sin(x)$ | 4) $f : x \longmapsto x^2\cos(x)$

Exercice 10. — Primitive(s) de $\ln$

1) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction ln (sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera).
2) Application : déterminer une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \ln(\sqrt{x})$

Exercice 11. — A l'aide d'une (ou plusieurs) IPP, calculer chacune des intégrales suivantes.

1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (1-x)\cos(x)\mathrm{d}x$ | 2) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln^2(x)\mathrm{d}x$ | 3) $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right)\mathrm{sh}\,(x)\mathrm{d}x$

Changement de variable

Exercice 12. — A l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$

2) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$

3) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln(x)}}$

4) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$

5) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,(x)}$

6) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$

Exercice 13. — A l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x+x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

5) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)}$

6) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)}$

Exercice 14. — Soient a un réel strictement positif, et f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+a}$. Déterminer une primitive de f sur I, où I est un intervalle à préciser.

Exercice 15. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Intégrales classiques en Physique

Exercice 16. — (Valeur efficace). Soit f une fonction T-périodique (définie sur $\mathbb{R}$). On appelle **valeur efficace de** f le réel positif : $\displaystyle\sqrt{\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f^2(t)\,\mathrm{d}t}$ (où a désigne un réel quelconque). *
Calculer les valeurs efficaces des fonctions cos et sin.

Exercice 17. — (Primitives "complexes" 1). Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$.

*. La valeur efficace est (heureusement !) indépendante du choix du réel a.

Exercice 18. — **(Primitives “complexes” 2)**. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de f dans chacun des cas suivants :

1/ $f : x \longmapsto e^x \cos(x)$

2/ $f : x \longmapsto e^x \sin(nx)$ avec $n \in \mathbb{N}$

3/ $f : x \longmapsto e^{kx} \cos(\mu x)$ avec $(k, \mu) \in \mathbb{R}^2$

4/ $g : x \longmapsto e^{kx} \sin(\mu x)$ avec $(k, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Pour vous tester ! Exercice de synthèse sur les intégrales

Exercice 19. — Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants, à l'aide d'une IPP et/ou d'un changement de variable et/ou en reconnaissant une primitive usuelle :

1) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 1}$

2) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2x(x-1)}$

3) $f : x \longmapsto \dfrac{3}{(x-2)(x^2-4x)}$

4) $f : x \longmapsto \dfrac{x^4}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

5) $f : x \longmapsto e^x \sin(\lambda x + \varphi)$ (λ, φ réels)

6) $f : x \longmapsto \ln(x-1)$

7) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\cos^2(x)}$

8) $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

9) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

10) $f : x \longmapsto x^2 \arctan(x)$

11) $f : x \longmapsto \arcsin^2(x)$

12) $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{2 + \cos^2(x)}$

Extraits de problèmes sur les intégrales

Exercice 20. — **Mines Sup** Pour tout entier naturel n non-nul on pose : $I_n = \dfrac{1}{2^{n+1} n!} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^{t/2}\, dt$.

1) Calculer I_1.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$.

3) Déduire de la question précédente que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{e} = I_n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!}$.

4) Déterminer un réel A tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{A}{2^n n!}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!}$.

Exercice 21. — **Mines Sup, encore une fois** On définit, pour tout entier naturel n, la fonction g_n par :

$$\forall\, x \in [0;1],\ g_n(x) = x^n \sqrt{1-x} \qquad \text{et on pose :} \quad I_n = \int_0^1 g_n(x)\, dx = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$$

1/ Calculer I_0.

2/ Pour tout entier naturel n, étudier le signe de $I_{n+1} - I_n$. En déduire le sens de variation de la suite (I_n).

3/ Montrer que pour tout entier naturel non-nul n on a : $I_n = \dfrac{2n}{2n+3} I_{n-1}$ *(on pourra intégrer par parties I_n).*

4/ En déduire les valeurs de I_1, I_2 et I_3.

5/ Montrer par récurrence sur n que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\quad I_n = \dfrac{2^{2n+3}(n+2)!n!}{(2n+4)!}$

Exercice 22. — **(Intégrales à paramètres).** Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels on pose :

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q\, dx$$

1) Calculer $I_{p,0}$, puis calculer $I_{0,q}$.

2) Etablir que $\forall\, (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ 0 \leqslant I_{q,p} \leqslant 1$.

3) Etablir que $\forall\, (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ I_{q,p} = I_{p,q}$ (on pourra utiliser un changement de variable).

4) Etablir que : $\forall\, (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ I_{p+1,q} = \dfrac{p+1}{q+1} I_{p,q+1}$.

5) Donner l'expression de $I_{p,q}$ en fonction de p et q.

Exercice 23. — Pour tout réel x raisonnable, on pose $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

1) Etablir que :

$$\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$$

2) Calculer l'intégrale : $\quad I = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

3) Déterminer une primitive sur $]\,0,\pi\,[$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$.

Exercice 24. — On considère la fonction $\varphi : x \longrightarrow \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de φ.

2) Calculer la dérivée de φ.

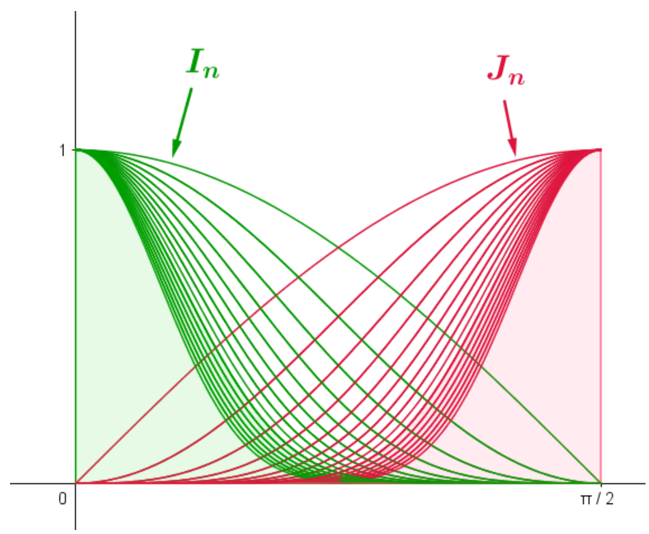
3) Dresser le tableau de variation de φ.

Questions classiques sur les intégrales de Wallis

➤ **Définition**. On appelle **intégrales de Wallis** les intégrales définies en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t$$

Exo-W 1. — **Premières valeurs**. Calculer I_0, I_1 et I_2.



Exo-W 2. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = J_n$

Exo-W 3. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geqslant 0$

Exo-W 4. — Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

Exo-W 5. — Montrer que la suite (I_n) est convergente.

Exo-W 6. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$

Exo-W 7. — Montrer que pour tout entier naturel p on a :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\,\frac{\pi}{2}$$

Exo-W 8. — Montrer que pour tout entier naturel p on a :

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Exo-W 9. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)\,I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$

Exo-W 10. — Etablir que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

Exo-W 11. — Etablir que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$

Exo-W 12. — Etablir que : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{2\,(2p+1)}{\pi}\,I_{2p}^2 = 1$