Colle 9 – Questions de cours

Question de cours 1 — Exercice (intégrales de Wallis). On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

Soit n un entier naturel. On a : $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\cos^{n+1}(t)\mathrm{d}t$

On pose alors : $\forall t \in [0, \pi/2]\,,\ \begin{cases} u(t) = \sin(t) \\ v(t) = \cos^{n+1}(t) \end{cases}$ d'où : $\forall t \in [0, \pi/2]\,,\ \begin{cases} u'(t) = \cos(t) \\ v'(t) = -(n+1)\sin(t)\cos^n(t) \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ (théorèmes généraux).

Il est donc légitime d'utiliser une intégration par parties pour écrire :

$$I_{n+2} = \underbrace{\left[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^n(t)\mathrm{d}t$$

D'où : $I_{n+2} = (n+1)\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(1-\cos^2(t)\right)\cos^n(t)\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n+2}(t)\mathrm{d}t$

C'est-à-dire : $I_{n+2} = (n+1)\,I_n - (n+1)\,I_{n+2}$ d'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n}$

Question de cours 2 — Exercice (intégrales de Wallis). On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$ (en admettant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$).

On souhaite établir que la propriété $P(p)$: $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$ est vraie pour tout entier naturel p.

Initialisation : pour $p = 0$, on a d'une part $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(t)\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{\pi/2} = 1$ et d'autre part $\dfrac{2^0\,(0!)^2}{1!} = 1$. La propriété est initialisée.

Hérédité : supposons $P(p)$ vraie pour un certain entier naturel p, et montrons que $P(p+1)$ l'est.

On a : $I_{2(p+1)+1} = I_{2p+3} = \dfrac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1} = \dfrac{2(p+1)}{2p+3}\,\dfrac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!} = \dfrac{2^2(p+1)^2}{2(p+1)(2p+3)}\,\dfrac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!} = \dfrac{2^{2(p+1)}\,[(p+1)!]^2}{(2p+3)!}$

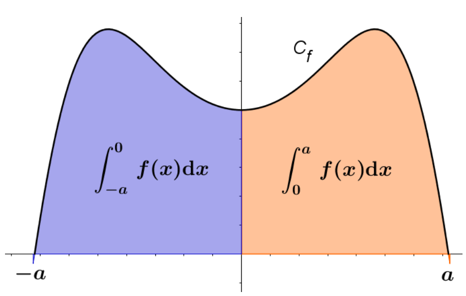
Ce qui signifie que $P\,(p+1)$ est vraie, établit l'hérédité de la propriété.

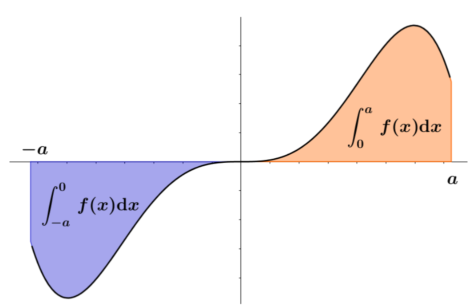
Conclusion. $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$

Question de cours 3 — Intégrale et parité. Soit $f \in \mathscr{C}^0\left([-a, a]\,, \mathbb{R}\right)$ (avec $a \in \mathbb{R}_+$).

Si f est paire, alors : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Si f est impaire, alors : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$





Soit $f \in \mathscr{C}^0([-a,a], \mathbb{R})$ (avec $a \in \mathbb{R}_+$).

D'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a : $\boxed{\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \ \ (\spadesuit)}$

Le changement de variable $u = -x$ donne : $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-u)\,(-\mathrm{d}u)$

Soit : $\boxed{\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-u)\,\mathrm{d}u \ \ (\clubsuit)}$

➤ <u>Si f est paire</u> : $\displaystyle\int_0^a f(-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u$. On en déduit, avec ($\clubsuit$) et ($\spadesuit$) que :
$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u$. Par conséquent : $\boxed{[f \text{ paire}] \Longrightarrow \left[\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right]}$

➤ <u>Si f est impaire</u> : $\displaystyle\int_0^a f(-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^a -f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u$. On en déduit, avec ($\clubsuit$) et ($\spadesuit$) que :

$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u$. Par conséquent : $\boxed{[f \text{ impaire}] \Longrightarrow \left[\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\right]}$

Question de cours 4 — **Exercice**. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $1/\mathrm{ch}$.

Un mot sur le domaine de validité : la fonction $1/\mathrm{ch}$ est continue sur $\mathbb{R}$, puisque la fonction ch est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

$$F = \int \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

On pose $u = \mathrm{e}^x$. On en déduit que $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u$ puis :

$F = \displaystyle\int \frac{2}{u + \frac{1}{u}}\,\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = 2\arctan(u)$ Finalement : $\boxed{\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}(x)} = 2\arctan(\mathrm{e}^x)}$

Question de cours 5 — **Exercice**. Primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ (avec $a \in \mathbb{R}_+^*$).

Un mot sur le domaine de validité : la fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}$.

$$F = \int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

On pose $u = \dfrac{x}{a}$. Alors $x = a\,u$ d'où $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}u$. Ainsi :

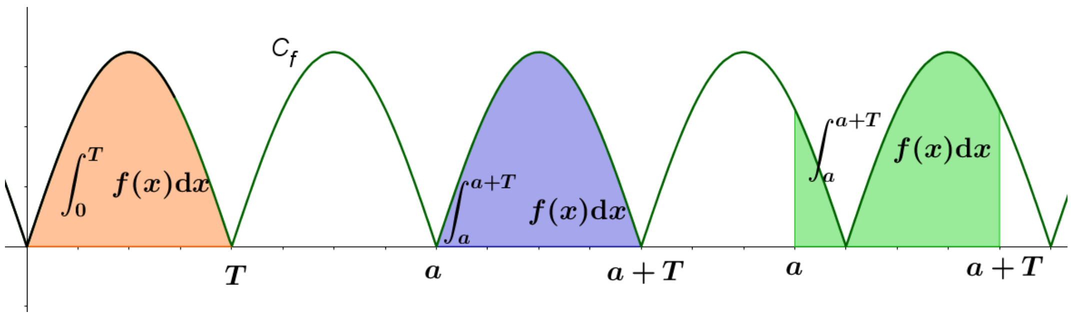
$F = \displaystyle\frac{1}{a}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\arctan(u)$ D'où finalement : $\boxed{\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}$

Question de cours 6 — **(Intégrale et périodicité)**. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, T-périodique (avec $T \in \mathbb{R}_+^*$). On a :

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\ \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

L'intégrale d'une fonction T périodique sur un segment de longueur T est indépendante de l'origine de ce segment.

Preuve. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, T-périodique (avec $T \in \mathbb{R}_+^*$), et soit a un réel : $\exists!\, k \in \mathbb{Z},\ kT \leqslant a < (k+1)T$.



On utilise alors la relation de Chasles pour écrire : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{(k+1)T}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$

Dans la première (*resp.* seconde) intégrale intervenant au second membre de cette égalité, on procède au changement de variable $u = x - kT$ (*resp.* $u = x - (k+1)\,T$). On obtient alors :

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a-kT}^{T} \underbrace{f(u+kT)}_{=f(u)}\,\mathrm{d}u + \int_0^{a-kT} \underbrace{f(u+(k+1)\,T)}_{=f(u)}\,\mathrm{d}u$$

D'où : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a-kT}^{T} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{a-kT} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$

Conclusion. Pour f continue et T-périodique, on a : $\displaystyle\forall\, a \in \mathbb{R},\ \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$

Question de cours 7 — **Exercice W1**. La suite (I_n) est convergente.

La fonction $t \longmapsto \cos^n(t)$ est positive sur $[0,\pi/2]$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n \geqslant 0}$.

Soit n un entier naturel. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t) - \cos^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,(\cos(t)-1)\,\mathrm{d}t$$

Or : $\forall\, t \in [0,\pi/2],\ \cos^n(t) \geqslant 0$ et $\cos(t) - 1 \leqslant 0$. On en déduit que : $\forall\, t \in [0,\pi/2],\ \cos^n(t)\,(\cos(t)-1) \leqslant 0$.

Par conséquent : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,(\cos(t)-1)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$. D'où : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n \leqslant 0}$.

On en déduit que la suite (I_n) est décroissante et minorée ; elle est donc convergente.

Question de cours 8 — **Exercice W2**. Pour tout entier naturel n, on a : $(n+1)I_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

Pour tout entier naturel n posons : $u_n = (n+1)\,I_{n+1}I_n$. On a : $u_{n+1} = (n+2)\,I_{n+2}I_{n+1}$.

Or, d'après une propriété précédente, on a : $u_{n+1} = (n+2)\,\dfrac{n+1}{n+2}I_nI_{n+1} = (n+1)\,I_{n+1}I_n$, soit : $u_{n+1} = u_n$. On en déduit que (u_n) est constante.

Par suite : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 = I_1 \times I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n+1)\,I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Question de cours 9 — **Exercice W1**. La suite (I_n) converge vers 0.

On sait déjà que la suite (I_n) est convergente vers une limite ℓ positive ou nulle. Si ℓ était strictement positive, alors on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\,I_{n+1}I_n=+\infty$, ce qui contredirait la propriété précédente.
Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

Hors-programme de colle — **Formule du changement de variable pour les intégrales**. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et à valeurs dans I. On a :

$$\int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\;\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\;\mathrm{d}x$$

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, et φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et à valeurs dans I. Puisque f est continue sur I, elle admet des primitives sur I : notons F l'une d'entre elles. La fonction $F\circ\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et pour tout réel $t\in[a,b]$, on a :

$$(F\circ\varphi)'(t) = F'\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t) = f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)$$

Par intégration sur l'intervalle $[a,b]$, on en déduit que : $\displaystyle\int_a^b (F\circ\varphi)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad (\spadesuit)$.

Or : $\displaystyle\int_a^b (F\circ\varphi)'(t)\,\mathrm{d}t = \left[(F\circ\varphi)(t)\right]_a^b = F\left(\varphi(b)\right) - F\left(\varphi(a)\right) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (\clubsuit)$.

On déduit de $(\spadesuit)$ et de $(\clubsuit)$ que : $\displaystyle\int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\;\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\;\mathrm{d}x$.

Hors-programme de colle — **Intégrales de Wallis, cas pair**. Pour tout entier naturel p :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}\left(p!\right)^2}\,\frac{\pi}{2}$$

On souhaite établir que la propriété $P(p)$: $\quad I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\left(p!\right)^2}\,\dfrac{\pi}{2}\quad$ est vraie pour tout entier naturel p.

<u>Initialisation</u> : pour $p=0$, on a d'une part $I_0=\dfrac{\pi}{2}$ et d'autre part $\dfrac{(0)!}{2^0\left(0!\right)^2}\,\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$. La propriété est initialisée.

<u>Hérédité</u> : supposons $P(p)$ vraie pour un certain entier naturel p, et montrons que $P(p+1)$ l'est.

On a : $I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2p+2}I_{2p} = \dfrac{2p+1}{2p+2}\,\dfrac{(2p)!}{2^{2p}\left(p!\right)^2}\,\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2p+2}{2p+2}\,\dfrac{2p+1}{2p+2}\,\dfrac{(2p)!}{2^{2p}\left(p!\right)^2}\,\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2p+2)!}{2^{2p+2}\left((p+1)!\right)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$

Ce qui signifie que $P\left(p+1\right)$ est vraie, établit l'hérédité de la propriété, et achève donc cette récurrence.

Conclusion. $\forall\, p\in\mathbb{N},\; I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\left(p!\right)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$