

CORRIGÉ DU PROBLÈME DE LA SEMAINE 3

EXERCICE 1 — (Somme) Soit n un entier naturel. Etablir que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

Corrigé.

Soit n un entier naturel. On a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{2ik\pi/3} \right) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{2i\pi/3})^k \right) = \operatorname{Im} \left((1 + e^{2i\pi/3})^n \right) \quad (\spadesuit)$$

$$\text{Or : } (1 + e^{2i\pi/3})^n = [e^{i\pi/3} (e^{-i\pi/3} + e^{i\pi/3})]^n = \left[2e^{i\pi/3} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]^n = [e^{i\pi/3}]^n = e^{in\pi/3} \quad (\clubsuit)$$

On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

EXERCICE 2 — (Développements limités et limites)

1/ Rappeler le développement limité à l'ordre 1 en 0 de $\ln(1+x)$.

2/ Dédurre de la question précédente les limites :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{et} \quad \ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

3/ Le but de cette question est de calculer : $\ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

a/ Etablir que pour tout réel x positif ou nul, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

b/ En déduire qu'il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

c/ Dédurre de ce qui précède que la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n \right]$ est finie (càd est égale à un réel).
Préciser sa valeur.

d/ Dédurre de ce qui précède la valeur de ℓ_3 .

Corrigé.

1/ D'après le cours : $\forall x > -1, \ln(1+x) = x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

2/ D'après la question précédente, on a pour tout $x > -1$ non nul : $\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Par suite : $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Toujours d'après la question 1, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

D'où : $n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + n\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = n\left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, on a : $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty$.

3/ Le but de cette question est de calculer : $\ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

a/ ► Posons : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ d'après les théorèmes généraux.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, f''(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^2}$.

Il est clair que f'' est positive sur $\mathbb{R}_+$ (puisque $\frac{1}{(1+x)^2} \leq 1$ pour tout $x \geq 0$).

Donc f' est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $f'(0) = 0$. Donc f' est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $f(0) = 0$. Donc f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ (♠).

► Posons à présent : $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ d'après les théorèmes généraux.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2$; $\forall x \in \mathbb{R}_+, g''(x) = 1 - 2x - \frac{1}{(1+x)^2}$

et $\forall x \in \mathbb{R}_+, g'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} - 2 = 2\left(\frac{1}{(1+x)^3} - 1\right)$.

Il est clair que g''' est négative sur $\mathbb{R}_+$ (puisque $\frac{1}{(1+x)^3} \leq 1$ pour tout $x \geq 0$).

Donc g'' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $g''(0) = 0$. Donc g'' est négative sur $\mathbb{R}_+$.

Donc g' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $g'(0) = 0$. Donc g' est négative sur $\mathbb{R}_+$.

Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $g(0) = 0$. Donc g est négative sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ ($\clubsuit$).

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

b/ Soit x un réel strictement positif. On a : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.

D'où : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \times \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^2}$.

Posons : $\varepsilon(x) = \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^2}$. On a alors : $\forall x > 0, \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$.

De plus, d'après la question précédente : $\forall x > 0, 0 \leq \varepsilon(x) \leq \frac{x}{3}$. Par encadrement : $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Enfin, la fonction ε peut être définie en 0 en posant $\varepsilon(0) = 0$.

Conclusion. Il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

c/ Soit n un entier naturel non nul. D'après la question précédente on a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\text{D'où : } n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n - \frac{1}{2} + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\text{D'où : } n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n = -\frac{1}{2} + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\text{On en déduit que : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n \right] = -\frac{1}{2}.$$

d/ Soit n un entier naturel non nul.

$$\text{On a : } e^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{-n} e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})} = e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n}) - n}.$$

$$\text{D'après la question c, on a donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$