Corrigé du problème de la semaine 4

Exercice 1 — (Application). On considère l'application :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto (3x - 5y,\, x - 2y)$$

Etablir que f est bijective, et déterminer l'expression de sa bijection réciproque f^{-1}.

Soit (X, Y) un élément arbitraire de $\mathbb{R}^2$. Résolvons l'équation $f(x, y) = (X, Y)$.

On a : $f(x, y) = (X, Y) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 3x - 5y = X & (L_1) \\ x - 2y = Y & (L_2) \end{array} \right.$

Alors : $(L_1) - (3L_2) \Longleftrightarrow y = X - 3Y$. Et : $2(L_1) - 5(L_2) \Longleftrightarrow x = 2X - 5Y$.

En d'autres termes : $f(x, y) = (X, Y) \Longleftrightarrow (x, y) = (2X - 5Y, X - 3Y)$.

On a ainsi établi que tout élément (X, Y) de $\mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}^2$.

Conclusion. L'application f est bijective, et sa bijection réciproque est

$$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(X, Y) \longmapsto (2X - 5Y, X - 3Y)$$

Exercice 2 — (Limite).

Soit β un réel. On pose, pour tout entier naturel non nul n : $u_n = 1 - \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}$.

1/ Pour tout réel $x > -1$, on pose : $f(x) = \sqrt{1+x}$. Rappeler la formule donnant le développement limité à l'ordre 1 en 0 de f.

Pour tout réel $x > -1$, on pose : $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

2/ Déterminer en fonction de β la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\beta u_n$.

Selon la question précédente, on a pour tout entier naturel non nul n :

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \lim_{n \to +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Par suite :

$$u_n = \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{2} + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) \text{ avec } \lim_{n \to +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

D'où :

$$n^\beta u_n = n^{\beta-1}\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) \text{ avec } \lim_{n\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

Conclusion. On en déduit que : $\lim_{n\to+\infty} n^\beta u_n = \begin{cases} +\infty \text{ si } \beta>1 \\ -\dfrac{1}{2} \text{ si } \beta=1 \\ 0 \text{ si } \beta<1 \end{cases}$

Exercice 3 — $\boxed{\textbf{(Applications - Similitudes directes).}}$
Pour tout couple $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, avec $a\neq 0$, on définit une application $f_{a,b}\in\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ en posant :

$$\begin{aligned} f_{a,b} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto az+b \end{aligned}$$

Une telle application $f_{a,b}$ est appelée une **similitude directe**, et on note $\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$ l'ensemble des similitudes directes :

$$\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C}) = \{f_{a,b},\ (a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\}$$

1/ **Deux cas particuliers**.

a/ **Le cas** $a=1$. Soit b un nombre complexe. Montrer que l'application $f_{1,b}$ est une bijection, et déterminer sa bijection réciproque.

Soient z et Z deux complexes. On a :

$$f_{1,b}(z)=Z \iff z+b=Z \iff z=Z-b$$

On en déduit que tout nombre complexe Z admet un unique antécédent par $f_{1,b}$, qui est $Z-b$.
Conclusion. L'application $f_{1,b}$ est une bijection, et sa bijection réciproque est $f_{1,-b}$.

b/ **L'application** $f_{1+\mathrm{i},2}$. Dans cet exemple, on pose $a=1+\mathrm{i}$ et $b=2$, et on considère l'application $g=f_{1+\mathrm{i},2}$ qui est définie sur $\mathbb{C}$ en posant :

$$\forall z\in\mathbb{C},\qquad g(z)=(1+\mathrm{i})z+2$$

Montrer que l'application g est une bijection, et déterminer sa bijection réciproque.

Soient z et Z deux complexes. On a :

$$g(z)=Z \iff (1+\mathrm{i})z+2=Z \iff (1+\mathrm{i})z=Z-2 \iff z=\frac{1}{1+\mathrm{i}}Z-\frac{2}{1+\mathrm{i}}$$

On en déduit que tout nombre complexe Z admet un unique antécédent par g, qui est $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}Z - \dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$.

Conclusion. L'application g est une bijection, et sa bijection réciproque est $f_{\frac{1}{1+\mathrm{i}},-\frac{2}{1+\mathrm{i}}}$.

2/ **Généralisation — Le groupe des similitudes directes**.

a/ Justifier brièvement que $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$.

Très très brièvement : $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} = f_{1,0}$. Ainsi : $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$.

b/ Soient (a,b) et $(a',b') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Pour tout complexe z, calculer $(f_{a',b'} \circ f_{a,b})(z)$. En déduire que l'application $f_{a',b'} \circ f_{a,b}$ est une similitude directe.

Soit z un complexe. On a :

$$(f_{a',b'} \circ f_{a,b})(z) = f_{a',b'}(f_{a,b}(z)) = f_{a',b'}(az+b) = a'az + a'b + b'$$

On en déduit que : $f_{a',b'} \circ f_{a,b} = f_{a'a,a'b+b'}$

Conclusion. L'application $f_{a',b'} \circ f_{a,b}$ est une similitude directe, explicitement : $f_{a'a,a'b+b'}$

c/ Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. A l'aide des deux questions précédentes, établir que $f_{a,b}$ est une bijection, et que sa bijection réciproque est une similitude directe.

Selon les deux questions précédentes, on a :

$$f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}} \circ f_{a,b} = f_{1,0} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \text{ et } f_{a,b} \circ f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}} = f_{1,0} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$$

Conclusion. $f_{a,b}$ est une bijection, et sa bijection réciproque est une similitude directe : $f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}$

3/ **Les similitudes directes à centre**.

Dans toute cette question, on considère un couple $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

Un nombre complexe z_0 est appelé **point fixe** de la similitude $f_{a,b}$ si : $f_{a,b}(z_0) = z_0$.

a/ Etablir que $f_{a,b}$ possède un unique point fixe z_0, que l'on exprimera en fonction de a et b.

z_0 est un point fixe de $f_{a,b}$ SSI $f_{a,b}(z_0) = z_0$ SSI $az_0 + b = z_0$ SSI $z_0 = -\dfrac{b}{a-1}$

Conclusion. $f_{a,b}$ possède un unique point fixe $z_0 = \dfrac{b}{1-a}$

b/ Avec les notations de la question précédente, établir que :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad f_{a,b}(z) = a\,(z - z_0) + z_0$$

Soit z un complexe quelconque. On a :

$$a\,(z - z_0) + z_0 = a\left(z - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} = \frac{a\,(1-a)\,z - ab + b}{1-a} = \frac{a\,(1-a)\,z + (1-a)b}{1-a} = az + b$$

Conclusion. $\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad f_{a,b}(z) = a\,(z - z_0) + z_0$

c/ Toujours avec les notations des questions précédentes, le complexe z_0 est appelé **centre** de la similitude directe $f_{a,b}$.

Montrer que deux similitudes directes ayant même centre commutent.

Soient f et g deux similitudes ayant même centre z_0. Il résulte de la question précédente qu'il existe deux complexes a et a' tels que pour tout z complexe on ait :

$$f(z) = a\,(z - z_0) + z_0 \text{ et } g(z) = a'\,(z - z_0) + z_0$$

Il reste alors à vérifier que $g \circ f = f \circ g$ (ce qui signifient que f et g commutent). Pour ce faire, on établit sans peine que :

$$g(f(z)) = aa'(z - z_0) + z_0 = f(g(z))$$

Conclusion. Si f et g sont deux similitudes ayant même centre, alors : $f \circ g = g \circ f$ (f et g commutent).