EXERCICES 9 — EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

NB : *Sauf mention explicite du contraire, dans les exercices de cette feuille, par "résoudre l'équation différentielle" on entend "déterminer toutes les solutions à valeurs réelles".*

EDL D'ORDRE 1.

EXERCICE 1. — Résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes (on précisera bien à chaque fois l'intervalle de résolution) :

1) $\mathrm{ch}(t)y' + \mathrm{sh}\,(t)y = \mathrm{ch}^2(t)$
2) $y' + \dfrac{y}{\tau} = E_0$ avec τ et E_0 réels non nuls
3) $(1+x^2)y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$
4) $xy' + (x-1)y = x^3$
5) $xy' + y = \arctan(x)$
6) $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$
7) $\sin(x)y' - \cos(x)y - \sin^3(x) = 0$
8) $y' + 2y = \dfrac{e^{-2t}}{\sqrt{1+t^2}}$

EXERCICE 2. — Résoudre l'équation différentielle (E) : $\left(x^2+1\right)y' - xy = \left(x^2+1\right)^{3/2}$.

EXERCICE 3. — **(Mines d'Albi, Douai, Nantes...)**. Résoudre l'équation différentielle (E) : $x^2y' + (2x-1)\,y = 0$ sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

EXERCICE 4. — **(Mines d'Albi, Douai, Nantes...)**. Résoudre l'équation différentielle (E) : $xy' + y = \mathrm{ch}\,(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

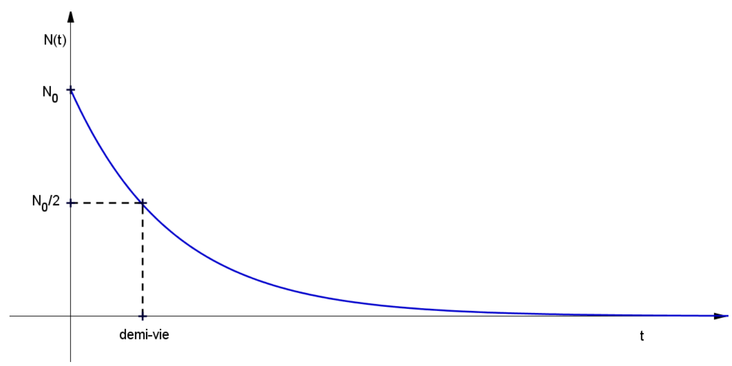
EDL D'ORDRE 1 – PROBLÈMES DE CAUCHY.

EXERCICE 5. — **DÉSINTÉGRATION RADIOACTIVE.** Dans un tissu radioactif, les lois de la Physique permettent d'affirmer que la vitesse de désintégration des noyaux radioactifs (à l'instant t) est proportionnelle au nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs présents dans le tissu à l'instant t. *

Ce phénomène, appelé désintégration radioactive, peut être modélisé par le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall\, t \in [0;+\infty[\ , \quad \dfrac{dN\,(t)}{dt} + \lambda N\,(t) = 0 \\ N\,(0) = N_0 \end{cases}$$

où N_0 est le nombre de noyaux radioactifs présents à l'instant $t = 0$, et λ désigne une constante strictement positive.



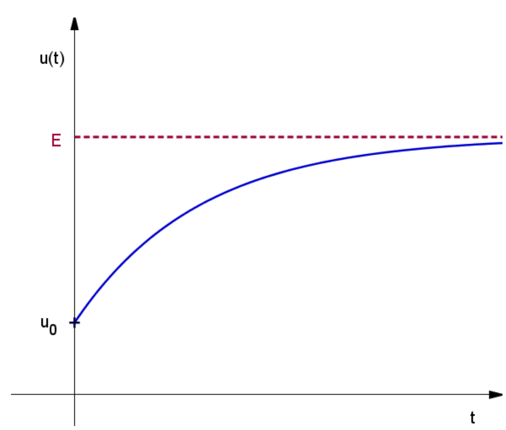
1) Déterminer l'expression de $N(t)$ pour tout réel $t \geqslant 0$.

2) Déterminer la période de demi-vie, c'est à dire la valeur de T telle que : $N(T) = N_0/2$.

EXERCICE 6. — **EVOLUTION D'UNE TENSION.**

On peut étudier l'évolution de la tension $u(t)$ lors de la charge d'un condensateur à travers un résistor, sous une tension E. La tension $u(t)$ est dans ce cas donnée par :

$$\begin{cases} \forall\, t \in [0;+\infty[\ , \quad \dfrac{du\,(t)}{dt} + \dfrac{u\,(t)}{RC} = \dfrac{E}{RC} \\ u\,(0) = u_0 \qquad (u_0 \in \mathbb{R}_+) \end{cases}$$



1) Déterminer l'expression de $u(t)$ pour tout réel $t \geqslant 0$.

2) Déterminer la limite de $u(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

*. Pour plus de précisions à ce sujet, consulter M Roveillo !

Exercice 7. — Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x} + \ln(x) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Exercice 8. — Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} xy' + y = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \\ y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

EDL d'ordre 2.

Exercice 9. — Résoudre les équations différentielles linéaires du second ordre suivantes :

1) $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-x}$
2) $\dfrac{y''}{2} - y' + \dfrac{y}{2} = \text{sh}\,(x)$
3) $y'' + 2y' + y = x\mathrm{e}^x$
4) $y'' + y' = 3 + 2x$
5) $y'' + 4y' + 4y = \sin x$
6) $y'' - 4y' + 4y = \cos(2x)$
7) $y'' + 4y' - 5y = 3\mathrm{e}^x$
8) (MinSup) $y'' - 3y' + 2y = \text{ch}\,(x)$
9) (MinSup) $y'' + 6y' + 9y = \mathrm{e}^{3x} + 2\mathrm{e}^{-3x}$
10) $y'' - 2y' + y = 6x\mathrm{e}^x$
11) $y'' + y = |x| + 1$
12) $y'' + y = \text{Max}\,(x, 0)$

Exercice 10. — Recherche d'une solution particulière quand le second membre est "$P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$"

Pour chacune des équations différentielles linéaires suivantes, déterminer une solution particulière.

1) (E) $y'' + y' - 2y = 2 - 4x$
2) (E) $y'' + y = x^3$
3) (E) $y'' + y' = 2x\mathrm{e}^x$
4) (E) $y'' + y' - 2y = 4x^2\mathrm{e}^{-x}$
5) (E) $y'' + y' - 2y = 54x\mathrm{e}^x$
6) (E) $y'' - 2y' + y = 6(x+1)\mathrm{e}^x$

EDL d'ordre 2 – Problèmes de Cauchy.

Exercice 11. — Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x) \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Exercice 12. — Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' - 4y = 4e^{-2x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 13. — **Oscillateur harmonique libre.** Le but de cet exercice est de résoudre une équation différentielle modélisant ce que les Physiciens appellent un oscillateur harmonique.[†]. Tout au long de cet exercice, on considère l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre :

$$(E):\ y''(t) + 2my'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

dans laquelle $m \geqslant 0$, et $\omega_0 > 0$.

Par ailleurs, dans cet énoncé, **résoudre (E)** signifiera : déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs réelles solutions de (E).

1) **Le cas $m = 0$ (sans frottements)**. Dans cette question, on suppose donc $m = 0$.

   a) Résoudre (E).

   b) *Problème de Cauchy.* Soit y_0 un réel. Déterminer la solution ψ de (E) satisfaisant les deux conditions initiales : $\psi(0) = y_0$ et $\psi'(0) = 0$.

   c) Retour sur le cas général : montrer que la solution générale de (E) peut s'écrire $f_H(t) = K\cos(\omega_0 t - \varphi)$ (où K et φ désignent deux réels).

†. Pour plus de précisions à ce sujet, consulter...

2) **Le cas $m > 0$ (avec frottements)**. Dans cette question, on suppose donc $m > 0$.

   a) Vérifier que le discriminant Δ de l'équation caractéristique associée à (E) est : $\Delta = 4\left(m^2 - \omega_0^2\right)$.

   b) Résoudre (E) en distinguant les 3 cas : $\Delta < 0$ (*régime pseudo-périodique*), $\Delta = 0$ (*régime critique*) et $\Delta > 0$ (*régime apériodique*).

3) Considérons à présent l'EDL :

$$(E): \; y''(t) + 2my'(t) + \omega_0^2 y(t) = A\cos(\omega t)$$

dans laquelle on suppose que A, m, ω et ω_0 sont dans $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer une solution particulière de E.

4) Soient R, L et C trois réels strictement positifs. Résoudre l'équation (E) : $\dfrac{d^2q}{dt} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{LC}q = 0$

Extraits de DS

Exercice 14. — EDL 1

1) Soit f la fonction définie en posant : $f(x) = \dfrac{1}{x\left(x^2-1\right)}$.

   a) Quel est l'ensemble de définition de f ? Dans la suite, nous noterons D cet ensemble.

   b) Déterminer la décomposition en éléments simples de f, c'est-à-dire déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in D, \; f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

2) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\text{(E)} : \qquad x(x^2-1)y' + 2y = x^2$$

en n'oubliant pas de préciser l'intervalle de résolution (que vous êtes libre de choisir).

Exercice 15. — EDL 2

Soient A, ω et y_0 trois réels strictement positifs, et α un réel strictement supérieur à 1.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles) le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \text{(E)} : \qquad y'' + \omega^2 y = A\sin(\alpha x) \\ y(0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 16. — (Oscillateur harmonique forcé).

Le but de cet exercice est de décrire le comportement de l'oscillateur harmonique initialement au repos, sans frottements, et "forcé" à l'aide de différents signaux. Mathématiquement, il s'agit donc de résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + \omega_0^2 y = f(t) & \textbf{(E)} \\ y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y(t_1) = 0 \end{cases} \qquad (\text{avec } \omega_0 > 0,\ t_1 > 0, \text{ et } f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}))$$

La première des questions ci-dessous consiste à résoudre l'équation homogène associée à **(E)**, *et les trois autres à déterminer la solution générale de* **(E)** *avec différents seconds membres.*
Par ailleurs, dans cet exercice, lorsque l'on demande de "déterminer la solution générale d'une équation différentielle", on entend "déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions".

1/ Déterminer la solution générale de l'EDL **(H)** : $\quad y'' + \omega_0^2 y = 0$

2/ **Signal constant**. Soit $C \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la solution générale de l'EDL

$$\textbf{(E1)} : \qquad y'' + \omega_0^2 y = C$$

3/ **Signal sinusoïdal**. Soient A et ω dans $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer la solution générale de l'EDL

$$\textbf{(E2)}: \qquad y'' + \omega_0^2 y = A\cos(\omega t)$$

4/ **Signal sinusoïdal et phénomène de résonance**. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + \omega_0^2 y = A\cos(\omega_0 t) & \textbf{(E3)} \\ y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y\left(\dfrac{\pi}{2\omega_0}\right) = 0 \end{cases}$$

Remarque *: attention, l'EDL (E3) est très semblable à l'équation (E2), à ceci près que dans (E3), on a $\omega = \omega_0$. Ce n'est pas un petit détail !. . .*

EXERCICES "HPTS". ‡

EXERCICE 17. — **EQUATIONS DE BERNOULLI** § Une **équation de Bernoulli** est une équation différentielle de la forme

$$(E) \qquad y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$$

où α est un réel quelconque ¶; et a et b sont deux fonctions continues sur un certain intervalle de $\mathbb{R}$. Une telle équation est appelée une *équation différentielle ordinaire du premier ordre*. Elle n'est évidemment plus linéaire ; par suite tout ce qui a été vu en cours sur les équas diffs (linéaires) ne s'applique donc plus.

Le principe de résolution est de se ramener à une équation différentielle linéaire *via* un *changement de fonction inconnue*, explicitement en posant : $z = y^{1-\alpha}$. Mettre en pratique cette méthode pour résoudre les équations suivantes.

1) (E) $y' - y = xy^2$

2) (E) $y' + xy = xy^2$

3) (E) $y' + \dfrac{1}{x}\,y = \dfrac{1}{x^4}\,y^{-3/4}$

EXERCICE 18. — **EQUATIONS DE RICCATI** ‖ Une **équation de Riccati** est une équation différentielle de la forme

$$(E) \qquad y' + a(x)y = b(x)y^\alpha + c(x)$$

où α est un réel quelconque ; et a, b et c sont trois fonctions continues sur un certain intervalle de $\mathbb{R}$. Avec beaucoup de précautions, on pourrait dire d'une telle équation que c'est une version non-homogène d'une équation de Bernoulli. En tout état de cause, il s'agit encore d'équations non linéaires, et les méthodes au programme de Sup ne vous permettent donc pas de les résoudre.

Dans le présent cas, disons que la méthode la plus "simple" pour résoudre une telle équation est basée sur la connaissance d'une solution particulière φ. Dans ce cas, le changement de fonction inconnue $z = y - \varphi$ permet de se ramener à une équation de Bernoulli (que l'on sait résoudre, voir plus haut).

Partant de ce principe et des solutions particulières proposées dans les énoncés, résoudre les équations différentielles suivantes :

1) (E) $y' = 2xy + y^2 + x^2 - 1$ (Sol. part. $\varphi(x) = -x$)

2) (E) $y' = \dfrac{1}{x^2}\,y^2 - \dfrac{1}{x}\,y + 1$ (Sol. part. $\varphi(x) = x$)

3) (E) $xy' = y^2 + y - 2$

4) (E) $xy' - y^2 + (2x+1)\,y = x^2 + 2x$

‡. "HPTS" = Hors-Programme, mais Tombe Souvent.

§. Ainsi nommées en référence à Jakob Bernoulli (1654-1705), mathématicien suisse, que l'on ne confondra pas avec son frère Jean Bernoulli (1667-1748), également mathématicien suisse, ni avec ses neveux Nicolas Bernoulli (1695-1726), Daniel Bernoulli (1700-1782) et Jean Bernoulli dit Jean II (1710-1790), tous mathématiciens suisses.

¶. On supposera quand même que α est différent de 0 et 1, puisque dans ces deux cas l'équation (E) est une équation différentielle linéaire.

‖. Ainsi nommées en référence à Jacopo Francesco Riccati (1676-1754), mathématicien italien né à Venise, où il a passé une bonne partie de sa vie. Ses travaux sur les canaux (de Venise, si vous avez bien suivi) l'ont conduit à résoudre des équations différentielles, dans le domaine que les Physiciens contemporains appellent mécanique des fluides. Un autre domaine d'application des équations de Riccati est la mécanique quantique ; plus précisément, des liens existent entre l'équation de Schrödinger (dont vous entendrez parler cette année, si ce n'est déjà fait) et les équations de Riccati. Ces liens, que je serais bien en peine de vous exposer dans le détail, sont décrits notamment dans les articles de Nicholas Wheeler "Quantum Applications of the Riccati Equation", 2004 (http ://www.reed.edu/physics/faculty/wheeler/documents/Quantum%20Mechanics/Miscellaneous%20Essays/Riccati%20Method%20in%20QM.pdf), et d'Eugene S. Kryachko "Notes on the Riccati Equation", 2005, (http ://www.researchgate.net/publication/31912753_Notes_on_the_Riccati_Equation).