Problème de la semaine 5

Exercice 1 — (Une famille d'intégrales)

Pour tout couple (a, b) d'entiers naturels on pose :

$$I(a,b) = \int_0^1 t^a (1-t)^b \, \mathrm{d}t$$

1/ Soit a un entier naturel. Calculer $I(a, 0)$.

2/ Soient a et b deux entiers naturels. A l'aide d'un changement de variable, établir que :

$$I(a,b) = I(b,a)$$

3/ Soient a et b deux entiers naturels. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$I(a, b+1) = \frac{b+1}{a+1} I(a+1, b)$$

4/ Etablir que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \ I(a,b) = \frac{a! \times b!}{(a+b+1)!}$$

Exercice 2 — (Deux suites d'intégrales)

En Maths, une très légère modification peut tranformer un exercice banal en un problème beaucoup moins sympathique...

➤ Partie I - Etude d'une suite d'intégrales

Dans cette partie, on pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \ I_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin(t) \mathrm{e}^{-nt} \, \mathrm{d}t$.

1/ Calculer I_n pour tout entier naturel n.

➤ Partie II - Etude d'une seconde suite d'intégrales

Dans cette partie, on pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \ J_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^n(t) \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

2/ Calculer J_0, J_1 et J_2.

3/ Montrer que la suite (J_n) est à termes positifs ou nuls ; puis montrer qu'elle est décroissante.

4/ Etablir que la suite (J_n) est convergente.

5/ Par la méthode d'intégration par parties, établir que : $\quad J_{n+2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{n^2+4n+5} J_n$

6/ Déduire de ce qui précède les valeurs de J_3 et J_4.