MPSI – Colle 9 (28 novembre au 2 décembre) : Méthodes de calcul intégral

Chapitre 8 : Primitives et intégrales

1 – Primitives (généralités)

2 – Primitives usuelles

3 – Intégrale d'une fonction continue sur un segment

4 – Intégration par parties

5 – Changement de variable

Propriété. *(changement de variable)* : soit f une fonction continue et φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, toutes deux définies sur des intervalles adéquats. Alors : $\displaystyle\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x$

La preuve de cette formule repose sur l'intégration terme à terme de la formule donnant la dérivée d'une composée.

Applications :

- une primitive de $\dfrac{1}{\mathrm{ch}}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto 2\arctan(\mathrm{e}^x)$ (poser $u = \mathrm{e}^x$) ;
- une primitive de $\dfrac{1}{\mathrm{sh}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}\right)$ (poser $u = \mathrm{e}^x$) ;
- une primitive de $1/\cos$ sur $[0, \pi/3]$ (par exemple, ou plus généralement sur tout intervalle ne contenant aucune valeur d'annulation de cos) est
$$x \longmapsto \ln\left|\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}\right| \quad \text{(poser } u = \tan(x/2)\text{)}$$
- soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ est
$$x \longmapsto \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{(poser } u = \frac{x}{a}\text{)}$$

6 – Compléments

➤ 2 applications remarquables du changement de variable

a) Intégrales et parité

b) Intégrales et périodicité

➤ Extension aux fonctions à valeurs complexes

Principale application : primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et de
$$x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx).$$

➤ Exercices classiques

a) $\mathrm{e} = \lim \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ *b) Intégrales de Wallis*

c) Primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+bx+c}$ *(b et c réels)*

Objectifs

Compétences relatives aux intégrales/primitives

- Savoir reconnaître et déterminer rapidement une primitive usuelle
- Calcul d'une intégrale/primitive en utilisant une intégration par parties : en particulier, savoir retrouver rapidement une primitive de ln, arctan, arcsin, arccos
- Connaître la définition de l'intégrale de Wallis I_n, et savoir retrouver la relation de récurrence $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\,I_n$ (se souvenir de l'astuce du "$n+2 = (n+1)+1$")
- Calcul d'une intégrale/primitive en utilisant un changement de variable : en particulier, savoir déterminer une primitive de $1/P(x)$ lorsque P est un polynôme de degré 2 avec $\Delta < 0$
- Calcul de $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ en observant que
$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int \mathrm{e}^{a+\mathrm{i}bx}\,\mathrm{d}x\right)$$
(même chose en remplaçant "cos" par "sin"…)

Questions de cours

➤ **Exercice**. Intégrales de Wallis (relation de récurrence) :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, I_n$$

➤ **Exercice**. Intégrales de Wallis (cas impair) : $\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$

➤ **Propriété**. Intégrale et parité.

➤ **Exercice**. Primitive sur $\mathbb{R}$ de $1/\mathrm{ch}$.

➤ **Exercice**. Primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ (avec a réel strictement positif).

Les questions suivantes sont sur le principe du volontariat

➤ **Propriété**. Intégrale et périodicité.

➤ **Exercice W1**. La suite (I_n) est convergente.

➤ **Exercice W2**. Pour tout entier naturel n, on a : $(n+1)I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

➤ **Exercice W3**. La suite (I_n) converge vers 0.