

EXERCICES 8 – MÉTHODES DE CALCUL INTÉGRAL – CORRIGÉ

CONVENTIONS. Dans cette feuille, on conviendra de noter $\int f(x)dx$ une primitive de la fonction f .

Par ailleurs, dans la plupart des calculs de primitives, on omettra de noter le “+ constante”, et on s’autorisera donc à écrire :

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x) \quad \text{par exemple.}$$

INTÉGRALES ET PRIMITIVES USUELLES

EXERCICE 1. — Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto x^4$ 2) $f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$ 3) $f : x \mapsto \sqrt{x}$	4) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ 5) $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ 6) $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$	7) $f : x \mapsto \sin(x) \cos(x)$ 8) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}}$ 9) $f : x \mapsto \tan^2(x)$
---	--	--

CORRIGÉ.

$$\begin{aligned}
1) \quad & \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} \\
2) \quad & \int \frac{1}{x^n} dx = \int x^{-n} dx = \frac{x^{1-n}}{1-n} \text{ si } n \neq 1; \text{ et } \ln(|x|) \text{ si } n = 1 \\
3) \quad & \int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \\
4) \quad & \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2} dx = 2x^{1/2} \\
5) \quad & \int x\sqrt{x} dx = \int x^{3/2} dx = \frac{2}{5} x^{5/2} \\
6) \quad & \int \sum_{k=0}^n a_k x^k dx = \sum_{k=0}^n a_k \int x^k dx = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \\
7) \quad & \int \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{4} \cos(2x) \\
8) \quad & \int \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}} dx = \frac{\arcsin(x)}{2} \\
9) \quad & \int \tan^2(x) dx = \int 1 + \tan^2(x) - 1 dx = \int 1 + \tan^2(x) dx - \int 1 dx = \tan(x) - x
\end{aligned}$$

EXERCICE 2. — Zoom sur les primitives de fonctions “de la forme $u'f'(u)$ ”

Trois **cas particuliers** remarquables :

- 1) Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u|$;
- 2) Une primitive de $u'e^u$ est e^u ;
- 3) Une primitive de $u'u^\alpha$ est $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Applications : déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto xe^{x^2}$ 2) $f : x \mapsto \cos(x) \sin^{2022}(x)$ 3) $f : x \mapsto (1+x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	4) $f : x \mapsto (1-x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ 5) $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ 6) $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$	7) $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln^\alpha x}$ 8) $f : x \mapsto \tan(x)$ 9) $f : x \mapsto \tan^3(x)$
--	--	---

CORRIGÉ.

$$1) \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

$$2) \int \cos(x) \sin^{2022}(x) dx = \frac{1}{2023} \sin^{2023}(x)$$

$$3) \int (1+x)^n dx = \frac{1}{n+1} (1+x)^{n+1}$$

$$4) \int (1-x)^n dx = -\frac{1}{n+1} (1-x)^{n+1}$$

$$5) \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$$

$$6) \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2(x)$$

$$7) \int \frac{1}{x \ln^\alpha(x)} dx = \frac{1}{1-\alpha} \ln^{1-\alpha}(x) \text{ si } \alpha \neq 1; \text{ et } \ln(|\ln(x)|) \text{ si } \alpha = 1$$

$$8) \int \tan(x) dx = -\ln(|\cos(x)|)$$

$$9) \int \tan^3(x) dx = \int \tan(x) + \tan^3(x) - \tan(x) dx = \int \tan(x)(1 + \tan^2(x)) dx - \int \tan(x) dx = \frac{1}{2} \tan^2(x) + \ln(|\cos(x)|)$$

EXERCICE 3. — Déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto \cos^2(x)$	3) $f : x \mapsto \cos^3(x)$	5) $f : x \mapsto \sin^4(x)$
2) $f : x \mapsto \tan^2(x)$	4) $f : x \mapsto \cos^4(x)$	6) $f : x \mapsto \cos^2(x) \sin^2(x)$

CORRIGÉ.

$$1) \int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \int 1 + \cos(2x) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$$

$$2) \int \tan^2(x) dx = \int 1 + \tan^2(x) - 1 dx = \tan(x) - x$$

$$3) \text{ Par linéarisation : } \int \cos^3(x) dx = \int \frac{\cos(3x) + 3 \cos(x)}{4} dx = \frac{\sin(3x)}{12} + \frac{3 \sin(x)}{4}$$

$$4) \text{ Par linéarisation : } \int \cos^4(x) dx = \int \frac{\cos(4x) + 4 \cos(2x) + 3}{8} dx = \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3x}{8}$$

$$5) \text{ Par linéarisation : } \int \sin^4(x) dx = \int \frac{\cos(4x) - 4 \cos(2x) + 3}{8} dx = \frac{\sin(4x)}{32} - \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3x}{8}$$

$$6) \int \cos^2(x) \sin^2(x) dx = \int \cos^2(x) dx - \int \cos^4(x) dx \text{ d'où la solution grâce aux questions 1 et 4.}$$

EXERCICE 4. — (Primitives de fractions rationnelles 1). Soit f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

- 1) Déterminer trois réels a , b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq -1, \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
- 2) Dédire de ce qui précède une primitive de f sur I .

CORRIGÉ.

- 1) Par identification (par exemple), on obtient : $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq -1, \quad f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

- 2) D'après ce qui précède :

$$\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln(|x+1|)$$

EXERCICE 5. — (Primitives de fractions rationnelles 2). Soit f définie sur $I =]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$.

Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1 \wedge x \neq -2, \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$. En déduire une primitive de f sur I .

CORRIGÉ.

- 1) Par identification (par exemple), on obtient : $a = 1/3$ et $b = -1/3$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1 \wedge x \neq -2, \quad f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right)$$

- 2) D'après ce qui précède :

$$\int f(x) dx = \ln \left(\left| \frac{x-1}{x+2} \right|^{1/3} \right)$$

EXERCICE 6. — (Primitives de fractions rationnelles 3). Déterminer une primitive de f sur I , dans chacun des cas suivants (I étant un intervalle à préciser).

$$1) f(x) = \frac{1}{x^2 - 7x + 6}$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$3) f(x) = \frac{1}{x^2 - a} \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$$

CORRIGÉ.

- 1) Notons que : $x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6)$. Donc il existe deux réels a et b tels que :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 7x + 6} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-6}$$

Par identification (par exemple), on obtient : $a = -1/5$ et $b = 1/5$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1 \wedge x \neq 6, \quad f(x) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-1} \right)$$

D'après ce qui précède :

$$\int f(x) dx = \ln \left(\left| \frac{x-6}{x-1} \right|^{1/5} \right)$$

2) Notons que : $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Donc il existe deux réels a et b tels que :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}$$

Par identification (par exemple), on obtient : $a = 1/2$ et $b = -1/2$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1 \wedge x \neq -1, \quad f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right)$$

D'après ce qui précède :

$$\int f(x) dx = \ln \left(\left| \frac{x - 1}{x + 1} \right|^{1/2} \right)$$

3) Notons que : $x^2 - a = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$. Donc il existe deux réels b et c tels que :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - a} = \frac{b}{x - \sqrt{a}} + \frac{c}{x + \sqrt{a}}$$

Par identification (par exemple), on obtient : $b = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ et $c = -\frac{1}{2\sqrt{a}}$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq \sqrt{a} \wedge x \neq -\sqrt{a}, \quad f(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left(\frac{1}{x - \sqrt{a}} - \frac{1}{x + \sqrt{a}} \right)$$

D'après ce qui précède :

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \left(\left| \frac{x - \sqrt{a}}{x + \sqrt{a}} \right| \right)$$

EXERCICE 7. — Calculer les intégrales suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1) I_1 = \int_0^1 x^n dx \\ 2) I_2 = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} 3) I_3 = \int_1^4 \sqrt{x} dx \\ 4) I_4 = \int_0^1 \frac{1}{x-4} dx \\ 5) I_5 = \int_0^8 x \sqrt[3]{x} dx \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} 6) I_6 = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(x)} dx \\ 7) I_7 = \int_0^{\pi/4} \tan^2(x) dx \end{array} \right| 8) I_8 = \int_0^{\pi/6} \cos^3(x) dx =$$

CORRIGÉ.

$$1) I_1 = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$2) I_2 = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin(x)]_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}$$

$$3) I_3 = \int_1^4 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_1^4 = \frac{14}{3}$$

$$4) I_4 = \int_0^1 \frac{1}{x-4} dx = [\ln(|x-4|)]_0^1 = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$5) I_5 = \int_0^8 x \sqrt[3]{x} dx = \left[\frac{3}{7} x^{7/3} \right]_0^8 = \frac{384}{7}$$

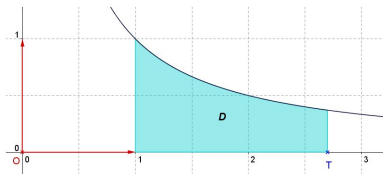
$$6) I_6 = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(x)} dx = [\tan(x)]_0^{\pi/4} = 1$$

$$7) I_7 = \int_0^{\pi/4} \tan^2(x) \, dx = \int_0^{\pi/4} 1 + \tan^2(x) - 1 \, dx = [\tan(x) - x]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$8) I_8 = \int_0^{\pi/6} \cos^3(x) \, dx = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x) \, dx = \left[\frac{1}{12} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x) \right]_0^{\pi/6} = \frac{11}{24}$$

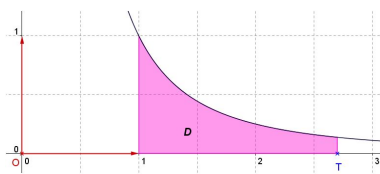
EXERCICE 8. — Fini ou pas ? Dans les trois questions ci-dessous, T désigne un réel supérieur ou égal à 1.

1) On note $A(T) = \int_1^T \frac{1}{x} \, dx$



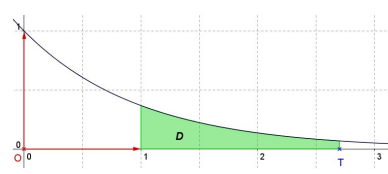
Calculer $A(T)$, puis $\lim_{T \rightarrow +\infty} A(T)$

2) On note $B(T) = \int_1^T \frac{1}{x^2} \, dx$



Calculer $B(T)$, puis $\lim_{T \rightarrow +\infty} B(T)$

3) On note $C(T) = \int_1^T e^{-x} \, dx$



Calculer $C(T)$, puis $\lim_{T \rightarrow +\infty} C(T)$

CORRIGÉ. 1) $A(T) = \int_1^T \frac{1}{x} \, dx = \ln(T)$. Donc : $\lim_{T \rightarrow +\infty} A(T) = +\infty$.

2) $B(T) = \int_1^T \frac{1}{x^2} \, dx = 1 - \frac{1}{T}$. Donc : $\lim_{T \rightarrow +\infty} B(T) = 1$.

3) $C(T) = \int_1^T e^{-x} \, dx = e^{-1} - e^{-T}$. Donc : $\lim_{T \rightarrow +\infty} C(T) = e^{-1}$.

INTÉGRATION PAR PARTIES

EXERCICE 9. — Applications directes – Déterminer une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto (1-x)e^{2x}$ 2) $f : x \mapsto xe^{-x}$ 3) $f : x \mapsto x \sin(x)$ 4) $f : x \mapsto x^2 \cos(x)$

CORRIGÉ.

1) $\int (1-x)e^{2x} \, dx = \frac{1}{2}(1-x)e^{2x} + \frac{1}{2} \int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2}(1-x)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$

2) $\int xe^{-x} \, dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} \, dx = -xe^{-x} - e^{-x}$

3) $\int x \sin(x) \, dx = -x \cos(x) + \int \cos(x) \, dx = -x \cos(x) + \sin(x)$

4) $\int x^2 \cos(x) \, dx = x^2 \sin(x) - 2 \int x \sin(x) \, dx$ puis on utilise la question précédente.

EXERCICE 10. — Primitive(s) de $\ln$

1) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction $\ln$ (sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera).

2) Application : déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x})$

CORRIGÉ. 1) Cf cours : $\int \ln(x) \, dx = x \ln(x) - x$.

2) $\int \ln(\sqrt{x}) \, dx = \frac{1}{2} \int \ln(x) \, dx = \frac{1}{2} (x \ln(x) - x)$

EXERCICE 11. — A l'aide d'une (ou plusieurs) IPP, calculer chacune des intégrales suivantes.

$$1) \int_{-\pi}^{\pi} (1-x) \cos(x) dx \quad \left| \quad 2) \int_1^e \ln^2(x) dx \quad \right| \quad 3) \int_0^1 (x^2+1) \operatorname{sh}(x) dx$$

CORRIGÉ.

$$\begin{aligned} 1) \int_{-\pi}^{\pi} (1-x) \cos(x) dx &= \underbrace{[(1-x) \sin(x)]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx}_{=0} = 0 \\ 2) \int_1^e \ln^2(x) dx &= \underbrace{[x \ln(x) - x \ln(x)]_1^e}_{=0} - \int_1^e \ln(x) - 1 dx = -[x \ln(x) - 2x]_1^e = e - 2 \\ 3) \int_0^1 (x^2+1) \operatorname{sh}(x) dx &= [(x^2+1) \operatorname{ch}(x)]_0^1 - 2 \int_0^1 x \operatorname{ch}(x) dx = 2 \operatorname{ch}(1) - 1 - 2[x \operatorname{sh}(x)]_0^1 + 2 \int_0^1 \operatorname{sh}(x) dx \\ &= 2 \operatorname{ch}(1) - 1 - 2 \operatorname{sh}(1) + 2 \operatorname{ch}(1) - 2 = 4 \operatorname{ch}(1) - 2 \operatorname{sh}(1) - 3 \end{aligned}$$

CHANGEMENT DE VARIABLE

EXERCICE 12. — A l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{lcl} 1) f : x \mapsto \frac{1}{e^x + 1} & \left| \quad 3) f : x \mapsto \frac{1}{x \sqrt{1 + \ln(x)}} \quad \right| & 5) f : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} \\ 2) f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} & \left| \quad 4) f : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \quad \right| & 6) f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)} \end{array}$$

CORRIGÉ.

$$\begin{aligned} 1) F(x) &= \int \frac{1}{e^x + 1} dx =_{(u=e^x)} \int \frac{1}{u(u+1)} du =_{(DES)} \int \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} du = \ln \left| \frac{u}{u+1} \right| = \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) \\ 2) F(x) &= \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} =_{u=\sqrt{x}} \int \frac{2du}{1+u^2} = 2 \arctan(u) = 2 \arctan(e^x) \\ 3) F(x) &= \int \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln(x)}} =_{u=\ln(x)} \int \frac{du}{\sqrt{1+u}} = 2\sqrt{1+u} = 2\sqrt{1 + \ln(x)} \\ 4) &\text{ CF cours} \\ 5) &\text{ CF cours} \\ 6) &\text{ CF cours} \end{aligned}$$

EXERCICE 13. — A l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lcl} 1) \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx & \left| \quad 3) \int_1^e \frac{1}{x + x(\ln x)^2} dx \quad \right| & 5) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin(x)} \\ 2) \int_0^{\ln 2} \frac{1}{1 + e^t} dt & \left| \quad 4) \int_1^4 \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt \quad \right| & 6) \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos(x)} \end{array}$$

CORRIGÉ.

$$\begin{aligned} 1) \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx &=_{u=e^x} \int_1^e \frac{u}{u+1} du = \int_1^e \frac{u+1}{u+1} - \frac{1}{u+1} du = e - 1 - \ln \left(\frac{e+1}{2} \right) \\ 2) \int_0^{\ln 2} \frac{1}{1 + e^t} dt &=_{u=e^t} \int_1^2 \frac{1}{u(1+u)} du \text{ puis même DES que dans l'exo 12, question 1} \end{aligned}$$

$$3) \int_1^e \frac{1}{x + x(\ln x)^2} dx =_{u=\ln(x)} \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du = \frac{\pi}{4}$$

$$4) \int_1^4 \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt =_{u=\sqrt{t}} \int_1^2 \frac{2}{u+1} du = 2[\ln(u+1)]_1^2 = 2\ln(3/2)$$

$$5) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin(x)} =_{u=\tan(x/2)} \int_{\tan(\pi/8)}^1 \frac{2}{1+u^2} \times \frac{1+u^2}{2u} du = \int_{\tan(\pi/8)}^1 \frac{1}{u} du = -\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$6) \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos(x)} =_{u=\tan(x/2)} \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{2}{1+u^2} \times \frac{1+u^2}{1-u^2} du = \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{2}{1-u^2} du$$

$$=_{(DES)} \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} du = \left[\ln\left(\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right) \right]_0^{\tan(\pi/8)} = \ln\left(\frac{1+\tan(\pi/8)}{1-\tan(\pi/8)}\right)$$

EXERCICE 14. — Soient a un réel strictement positif, et f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2 + a}$. Déterminer une primitive de f sur I , où I est un intervalle à préciser.

CORRIGÉ. CF exemple fait en cours (dans le paragraphe sur le changement de variable) pour le calcul d'une primitive de $\frac{1}{x^2 + a^2}$.

EXERCICE 15. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

CORRIGÉ. Fait en classe.

INTÉGRALES CLASSIQUES EN PHYSIQUE

EXERCICE 16. — (**Valeur efficace**). Soit f une fonction T -périodique (définie sur $\mathbb{R}$). On appelle **valeur efficace** de f le réel positif : $\sqrt{\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f^2(t) dt}$ (où a désigne un réel quelconque).^{*}
Calculer les valeurs efficaces des fonctions cos et sin.

CORRIGÉ. Fait en classe.

EXERCICE 17. — (**Primitives “complexes” 1**). Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{\alpha x}$.

CORRIGÉ. CF cours

EXERCICE 18. — (**Primitives “complexes” 2**). Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de f dans chacun des cas suivants :

$$1/ \quad f : x \mapsto e^x \cos(x)$$

$$3/ \quad f : x \mapsto e^{kx} \cos(\mu x) \text{ avec } (k, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

$$2/ \quad f : x \mapsto e^x \sin(nx) \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

$$4/ \quad g : x \mapsto e^{kx} \sin(\mu x) \text{ avec } (k, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

CORRIGÉ.

$$1/ \quad \int e^x \cos(x) dx = \operatorname{Re} \left(\int e^x e^{ix} dx \right) = \operatorname{Re} \left(\int e^{(1+i)x} dx \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1+i} e^{(1+i)x} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1-i}{2} e^x (\cos(x) + i \sin(x)) \right)$$

$$= \frac{e^x}{2} (\cos(x) + \sin(x))$$

$$2/ \quad \int e^x \sin(nx) dx = \operatorname{Im} \left(\int e^x e^{inx} dx \right) = \operatorname{Im} \left(\int e^{(1+ni)x} dx \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1+ni} e^{(1+ni)x} \right)$$

$$= \operatorname{Im} \left(\frac{1-ni}{n^2+1} e^x (\cos(nx) + i \sin(nx)) \right) = \frac{e^x}{n^2+1} (\sin(nx) - n \cos(nx))$$

^{*}. La valeur efficace est (heureusement !) indépendante du choix du réel a .

4/ Si $(k, \mu) \neq (0, 0)$, on a :

$$\begin{aligned} \int e^{kx} \sin(\mu x) dx &= \operatorname{Im} \left(\int e^{kx} e^{i\mu x} dx \right) = \operatorname{Im} \left(\int e^{(k+i\mu)x} dx \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{k+i\mu} e^{(k+i\mu)x} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{k-i\mu}{k^2+\mu^2} e^{kx} (\cos(\mu x) + i \sin(\mu x)) \right) = \frac{e^{kx}}{k^2+\mu^2} (k \sin(\mu x) - \mu \cos(\mu x)) \end{aligned}$$

3/ Selon la question 4, si $(k, \mu) \neq (0, 0)$, on a :

$$\int e^{kx} \cos(\mu x) dx = \operatorname{Re} \left(\frac{k-i\mu}{k^2+\mu^2} e^{kx} (\cos(\mu x) + i \sin(\mu x)) \right) = \frac{e^{kx}}{k^2+\mu^2} (k \cos(\mu x) + \mu \sin(\mu x))$$

POUR VOUS TESTER ! EXERCICE DE SYNTHÈSE SUR LES INTÉGRALES

EXERCICE 19. — Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants, à l'aide d'une IPP et/ou d'un changement de variable et/ou en reconnaissant une primitive usuelle :

1/ $f : x \mapsto \frac{x^2 - x - 1}{x - 1}$	5/ $f : x \mapsto e^x \sin(\lambda x + \varphi)$ (λ, φ réels)	9/ $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x+1}}$
2/ $f : x \mapsto \frac{1}{2x(x-1)}$	6/ $f : x \mapsto \ln(x-1)$	10/ $f : x \mapsto x^2 \arctan(x)$
3/ $f : x \mapsto \frac{3}{(x-2)(x^2-4x)}$	7/ $f : x \mapsto \frac{x}{\cos^2(x)}$	11/ $f : x \mapsto \arcsin^2(x)$
4/ $f : x \mapsto \frac{x^4}{(x-1)(x-2)(x-3)}$	8/ $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$	12/ $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{2 + \cos^2(x)}$

CORRIGÉ.

$$1/ \int \frac{x^2 - x - 1}{x - 1} dx = \int x - \frac{1}{x - 1} dx = \frac{x^2}{2} - \ln(|x - 1|)$$

$$2/ \int \frac{1}{2x(x-1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x(x-1)} dx \stackrel{(DES)}{=} \frac{1}{2} \int -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} dx = \ln \left(\sqrt{\left| \frac{x-1}{x} \right|} \right)$$

$$\begin{aligned} 3/ \int \frac{3}{(x-2)(x^2-4x)} dx &= \int \frac{3}{(x-2)x(x-4)} dx \stackrel{(DES)}{=} \int \frac{-3/4}{x-2} + \frac{3/8}{x} + \frac{3/8}{x-4} dx \\ &= -\frac{3}{4} \ln(|x-2|) + \frac{3}{8} \ln(|x|) + \frac{3}{8} \ln(|x-4|) \end{aligned}$$

4/ Il est clair que : $x^4 = (x-1)(x-2)(x-3)(x+6) + 25x^2 - 60x + 36 \dots^\dagger$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx &= \int x + 6 dx + \int \frac{25x^2 - 60x + 36}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx \\ &\stackrel{(DES)}{=} \frac{x^2}{2} + 6x + \int \frac{1/2}{x-1} - \frac{16}{x-2} + \frac{81/2}{x-3} dx = \frac{x^2}{2} + 6x + \frac{1}{2} \ln(|x-1|) - 16 \ln(|x-2|) + \frac{81}{2} \ln(|x-3|) \end{aligned}$$

[†]. Non, ce n'est pas clair du tout ; mais on peut obtenir cette identité en effectuant une division euclidienne (de polynômes). C'est une méthode que nous expliquerons plus tard cette année, dans le chapitre consacré aux polynômes.

$$\begin{aligned}
 5/ \int e^x \sin(\lambda x + \varphi) dx &= \operatorname{Im} \left(\int e^{x(1+i\lambda)} e^{i\varphi} dx \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i\varphi}}{1+i\lambda} e^{x(1+i\lambda)} \right) \\
 &= \operatorname{Im} \left(\frac{(1-i\lambda)(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))}{1+\lambda^2} e^x (\cos(\lambda x) + i\sin(\lambda x)) \right)
 \end{aligned}$$

En développant un peu :

$$\int e^x \sin(\lambda x + \varphi) dx = \operatorname{Im} \left(\frac{e^x}{1+\lambda^2} (\cos(\varphi) + \lambda \sin(\varphi) + i(\sin(\varphi) - \lambda \cos(\varphi))) (\cos(\lambda x) + i\sin(\lambda x)) \right)$$

D'où finalement :

$$\int e^x \sin(\lambda x + \varphi) dx = \frac{e^x}{1+\lambda^2} [(\cos(\varphi) + \lambda \sin(\varphi)) \sin(\lambda x) + (\sin(\varphi) - \lambda \cos(\varphi)) \cos(\lambda x)]$$

$$6/ \int \ln(x-1) dx =_{IPP} x \ln(x-1) - \int \frac{1}{x-1} dx = x \ln(x-1) - \ln(x-1)$$

$$7/ \int \frac{x}{\cos^2(x)} dx =_{IPP} x \tan(x) - \int \tan(x) dx = x \tan(x) + \ln(|\cos(x)|)$$

$$8/ \int \frac{\ln(x)}{x^2} dx =_{IPP} -\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln(x)+1}{x}$$

$$9/ \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx =_{IPP} 2x\sqrt{x+1} - 2 \int \sqrt{x+1} dx = 2x\sqrt{x+1} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2}$$

$$10/ \int x^2 \arctan(x) dx =_{IPP} \frac{1}{3} x^3 \arctan(x) - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx$$

$$\text{Or : } \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \int \frac{x+x^3-x}{1+x^2} dx = \int x - \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} - \ln(\sqrt{1+x^2})$$

$$\text{Par suite : } \int x^2 \arctan(x) dx = \frac{1}{3} x^3 \arctan(x) - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{3} \ln(\sqrt{1+x^2})$$

$$11/ \int \arcsin^2(x) dx =_{IPP} \arcsin(x) \left(x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} \right) - \int \frac{x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{Or : } \int \frac{x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} + 1 dx = x + \int \frac{x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx =_{IPP} x + \frac{1}{2} x \arcsin^2(x) - \frac{1}{2} \int \arcsin^2(x) dx$$

On en déduit que :

$$\int \arcsin^2(x) dx = \arcsin(x) \left(x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} \right) - x - \frac{1}{2} x \arcsin^2(x) + \frac{1}{2} \int \arcsin^2(x) dx$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{2} \int \arcsin^2(x) dx = \arcsin(x) \left(x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} \right) - x - \frac{1}{2} x \arcsin^2(x)$$

$$\text{Finalement : } \int \arcsin^2(x) dx = 2 \arcsin(x) \left(x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} \right) - 2x - x \arcsin^2(x)$$

$$= 2 \arcsin(x) \sqrt{1-x^2} - 2x + x \arcsin^2(x)$$

$$\begin{aligned}
 12/ \int \frac{\sin(x)}{2 + \cos^2(x)} dx &=_{u=\cos(x)} \int \frac{-1}{2 + u^2} du = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} du =_{t=u/\sqrt{2}} -\frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)
 \end{aligned}$$

Finalement : $\int \frac{\sin(x)}{2 + \cos^2(x)} dx = -\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{\cos(x)}{\sqrt{2}}\right)$

EXTRAITS DE PROBLÈMES SUR LES INTÉGRALES

EXERCICE 20. — **MINES SUP** Pour tout entier naturel n non-nul on pose : $I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{t/2} dt$.

- 1) Calculer I_1 .
- 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$.
- 3) Dédire de la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{e} = I_n + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k k!}$.
- 4) Déterminer un réel A tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{A}{2^n n!}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k k!}$.

CORRIGÉ. Fait en classe.

EXERCICE 21. — **MINES SUP, ENCORE UNE FOIS** On définit, pour tout entier naturel n , la fonction g_n par :

$$\forall x \in [0; 1], g_n(x) = x^n \sqrt{1-x} \quad \text{et on pose : } I_n = \int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$$

- 1/ Calculer I_0 .
- 2/ Pour tout entier naturel n , étudier le signe de $I_{n+1} - I_n$. En déduire le sens de variation de la suite (I_n) .
- 3/ Montrer que pour tout entier naturel non-nul n on a : $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$ (on pourra intégrer par parties I_n).
- 4/ En déduire les valeurs de I_1, I_2 et I_3 .
- 5/ Montrer par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{2^{2n+3} (n+2) n!}{(2n+4)!}$

CORRIGÉ.

1/ On a : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = -\frac{2}{3} [(1-x)^{3/2}]_0^1 = \frac{2}{3}$.

2/ Pour tout entier naturel n on a : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \underbrace{x^n (x-1) \sqrt{1-x}}_{\leq 0} dx$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n \leq 0$. Donc la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3/ Soit n un entier naturel non-nul. On a : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$.

Pour tout réel x dans $[0, 1]$, posons : $u(x) = x^n$ et $v(x) = -\frac{2}{3} (1-x)^{3/2}$. On a alors : $u'(x) = nx^{n-1}$ et $v'(x) = \sqrt{1-x}$.

Par intégration par parties, on obtient :

$$I_n = \left[-\frac{2x^n}{3} (1-x)^{3/2} \right]_0^1 + \frac{2n}{3} \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{3/2} dx \iff I_n = \frac{2n}{3} \int_0^1 x^{n-1} (1-x) \sqrt{1-x} dx$$

D'où :

$$I_n = \frac{2n}{3} \int_0^1 (x^{n-1} - x^n) \sqrt{1-x} dx = \frac{2n}{3} (I_{n-1} - I_n)$$

Ainsi :

$$\left(1 + \frac{2n}{3}\right) I_n = \frac{2n}{3} I_{n-1}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$

4/ On déduit des questions 1 et 3 que :

$$I_1 = \frac{4}{15}; \quad I_2 = \frac{16}{105}; \quad I_3 = \frac{32}{315}$$

EXERCICE 22. — (INTÉGRALES À PARAMÈTRES). Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels on pose :

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$$

- 1) Calculer $I_{p,0}$, puis calculer $I_{0,q}$.
- 2) Etablir que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq I_{q,p} \leq 1$.
- 3) Etablir que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I_{q,p} = I_{p,q}$ (on pourra utiliser un changement de variable).
- 4) Etablir que : $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I_{p+1,q} = \frac{p+1}{q+1} I_{p,q+1}$.
- 5) Donner l'expression de $I_{p,q}$ en fonction de p et q .

CORRIGÉ. A venir : c'est un exercice du PBS5.

EXERCICE 23. — Pour tout réel x raisonnable, on pose $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

- 1) Etablir que :

$$\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$$

- 2) Calculer l'intégrale : $I = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)} dx$

- 3) Déterminer une primitive sur $]0, \pi[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$.

CORRIGÉ. Cf cours.

EXERCICE 24. — On considère la fonction $\varphi : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$.

- 1/ Déterminer l'ensemble de définition de φ .
- 2/ Calculer la dérivée de φ .
- 3/ Dresser le tableau de variation de φ .

CORRIGÉ.

1/ La fonction $1/\ln$ est définie, et continue, sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

L'ensemble de définition de φ est donc : $D_\varphi =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

2/ La fonction $1/\ln$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, elle admet des primitives (th fondamental de l'Analyse) : notons F l'une d'entre elles.

Par définition de φ et de F , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad \varphi(x) = F(x^2) - F(x)$$

Il s'ensuit que φ est dérivable sur D_φ , et pour tout réel x de D_φ on a :

$$\varphi'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

3/ Selon la question précédente, la fonction φ est strictement positive sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

QUESTIONS CLASSIQUES SUR LES INTÉGRALES DE WALLIS

► **Définition.** On appelle **intégrales de Wallis** les intégrales définies en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$$

Exo-W 1. — Premières valeurs. Calculer I_0 , I_1 et I_2 .

CORRIGÉ. $I_0 = \frac{\pi}{2}$ (usuel) ; $I_1 = 1$ (usuel) ; $I_2 = \frac{\pi}{2}$ (linéarisation)

Exo-W 2. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = J_n$

CORRIGÉ. changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$

Exo-W 3. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$

CORRIGÉ. positivité de l'intégrale

Exo-W 4. — Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

CORRIGÉ. calcul de $I_{n+1} - I_n$ + positivité de l'intégrale.

Exo-W 5. — Montrer que la suite (I_n) est convergente.

CORRIGÉ. 2 exos précédents + “toute suite réelle décroissante et minorée converge”

Exo-W 6. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

CORRIGÉ. IPP et $n+2 = (n+1) + 1$

Exo-W 7. — Montrer que pour tout entier naturel p on a :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

CORRIGÉ. récurrence sur p

Exo-W 8. — Montrer que pour tout entier naturel p on a :

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$$

CORRIGÉ. récurrence sur p

Exo-W 9. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$

CORRIGÉ. la suite de terme général $(n+1)I_{n+1}I_n$ est constante

Exo-W 10. — Etablir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

CORRIGÉ. conséquence des exos W3, W5 et W9

Exo-W 11. — Etablir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$

CORRIGÉ. $0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ d'où $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$ + gendarmes

Exo-W 12. — Etablir que : $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2(2p+1)}{\pi} I_{2p}^2 = 1$

CORRIGÉ. $I_{2p}^2 = \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \times I_{2p}I_{2p+1}$