

RELATIONS BINAIRES.

EXERCICE 1. — **CONGRUENCES.** Soit p un entier naturel ≥ 2 . On définit une relation binaire sur \mathbb{N} appelée **relation de congruence modulo p** et notée \equiv en posant

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \equiv m [p] \iff n - m \text{ est multiple de } p$$

On rappelle que l’assertion “ $n - m$ est multiple de p ” signifie qu’il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $n - m = kp$.

1/ Montrer que la relation de congruence modulo p est une relation d’équivalence sur \mathbb{Z} .

Il suffit de vérifier les 3 axiomes caractérisant les relations d’équivalence : réflexivité, symétrie, transitivité.

► **Réflexivité.** Soit n un entier. Alors : p divise $n - n$. . . Donc : $n \equiv n [p]$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{Z}, n \equiv n [p]$. La relation de congruence est donc réflexive.

► **Symétrie.** Soient n et m deux entiers. Supposons que : $n \equiv m [p]$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $n - m = kp$.

Donc : $m - n = (-k)p$. Donc : p divise $m - n$. Donc : $m \equiv n [p]$.

Ainsi : $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, (n \equiv m [p]) \implies (m \equiv n [p])$. La relation de congruence est donc symétrique.

► **Transitivité.** Soient n, m et q trois entiers. Supposons que : $n \equiv m [p]$ et $m \equiv q [p]$. Alors il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que : $n - m = kp$ et $m - q = k'p$.

Donc : $n - q = (k + k')p$. Donc : p divise $n - q$. Donc : $n \equiv q [p]$.

Ainsi : $\forall (n, m, q) \in \mathbb{Z}^3, (n \equiv m [p] \text{ et } m \equiv q [p]) \implies (n \equiv q [p])$. La relation de congruence est donc transitive.

Conclusion. La relation de congruence est réflexive, symétrique et transitive. C’est donc une relation d’équivalence sur \mathbb{Z} .

2/ Montrer que la relation de congruence modulo p est compatible avec la somme et le produit, dans le sens suivant. Pour tout quadruplet (a, b, c, d) d’entiers naturels :

$$(a \equiv c [p]) \wedge (b \equiv d [p]) \implies (a + b \equiv c + d [p]) \wedge (ab \equiv cd [p])$$

Par hypothèse, il existe deux entiers k et k' tels que : $c = a + kp$ et $d = b + k'p$. On en déduit que : $c + d = a + b + (k + k')p$: donc $a + b \equiv c + d [p]$.

Par ailleurs : $cd = ab + (kb + k'a + kk'p)p$. Donc $ab \equiv cd [p]$.

3/ Etablir que : $\forall (a, c, n) \in \mathbb{N}^3, (a \equiv c [p]) \implies (\forall n \in \mathbb{N}, a^n \equiv c^n [p])$

Par récurrence sur n à partir de la propriété établie sur le produit dans la question précédente.

4/ Montrer que $2^{123} + 3^{121}$ est multiple de 11.

Observons que : $2^5 = 32$. Or $32 = 3 \times 11 - 1$. Donc : $32 \equiv -1 [11]$. Par suite : $2^{10} \equiv 1 [11]$. Donc : $2^{120} \equiv 1 [11]$. Donc : $2^{123} \equiv 8 [11]$.

Observons que : $3^5 = 243$. Or $243 = 22 \times 11 + 1$. Donc : $243 \equiv 1 [11]$. Par suite : $3^{10} \equiv 1 [11]$. Donc : $3^{120} \equiv 1 [11]$. Donc : $3^{121} \equiv 3 [11]$.

D’après ce qui précède : $2^{123} + 3^{121} \equiv 0 [11]$. **Conclusion.** 11 divise $2^{123} + 3^{121}$.

EXERCICE 2. — **ORDRE TOTAL SUR \mathbb{C}** . On définit une relation binaire (notée \prec) sur \mathbb{C} en posant :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad z \prec z' \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(z') \\ \text{ou} \\ \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

Etablir que la relation \prec est une relation d'ordre totale sur \mathbb{C} .

Dans un premier temps, il suffit de vérifier les 3 axiomes caractérisant les relations d'ordre : réflexivité, antisymétrie, transitivité.

► **Réflexivité.** Soit z un complexe. On observe judicieusement que : $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z)$, et $\operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Im}(z)$. D'où : $z \prec z$.

Ainsi : $\forall z \in \mathbb{C}, z \prec z$. La relation \prec est donc réflexive.

► **Antisymétrie.** Soient z et z' deux complexes. Supposons que : $z \prec z'$ et $z' \prec z$.

Alors $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$; en effet, si l'une des inégalités $\operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(z')$ ou $\operatorname{Re}(z') < \operatorname{Re}(z)$ était satisfaite, l'autre ne pourrait l'être.

On en déduit déjà que : $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$.

En continuant de traduire les deux hypothèses, on obtient : $\operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Im}(z')$ et $\operatorname{Im}(z') \leq \operatorname{Im}(z)$. D'où : $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$.

Il s'ensuit que $z = z'$.

Ainsi : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, (z \prec z' \text{ et } z' \prec z) \implies (z = z')$. La relation \prec est donc antisymétrique.

► **Transitivité.** Soient z, z' et z'' trois complexes. Supposons que : $z \prec z'$ et $z' \prec z''$.

On distingue 4 cas :

CAS 1	CAS 2	CAS 3	CAS 4
$\operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Re}(z') < \operatorname{Re}(z'')$	$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Im}(z')$ et $\operatorname{Re}(z') < \operatorname{Re}(z'')$	$\operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Re}(z') = \operatorname{Re}(z'')$ et $\operatorname{Im}(z') \leq \operatorname{Im}(z'')$	$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Im}(z')$ et $\operatorname{Re}(z') = \operatorname{Re}(z'')$ et $\operatorname{Im}(z') \leq \operatorname{Im}(z'')$

Dans les cas 1, 2 et 3 : $\operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(z'')$. Donc : $z \prec z''$.

Dans le cas 4 : $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z'')$ et $\operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Im}(z'')$. Donc : $z \prec z''$.

Ainsi : $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z \prec z' \text{ et } z' \prec z'') \implies (z \prec z'')$. La relation \prec est donc transitive.

Conclusion intermédiaire. La relation \prec est réflexive, antisymétrique et transitive. C'est donc une relation d'ordre sur \mathbb{C} .

De plus, pour tout couple (z, z') de nombres complexes, il est immédiat que l'on a $z \prec z'$ ou $z' \prec z$. La relation d'ordre \prec est donc totale.

Conclusion. La relation \prec est une relation d'ordre totale sur \mathbb{C} . L'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} peut donc être totalement ordonné !

EXERCICE 3. — On définit une relation binaire \mathcal{R} sur \mathbb{R}_+^* en posant pour tout couple de réels (x, y) strictement positifs :

$$x\mathcal{R}y \iff \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n$$

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Dans un premier temps, il suffit de vérifier les 3 axiomes caractérisant les relations d'ordre : réflexivité, antisymétrie, transitivité.

► **Réflexivité.** Soit x un réel strictement positif. On observe judicieusement que : $x = x^1$ (et que $1 \in \mathbb{N} \dots$). D'où : $x\mathcal{R}x$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x\mathcal{R}x$. La relation \mathcal{R} est donc réflexive.

► **Antisymétrie.** Soient x et y deux réels > 0 . Supposons que : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$.

Alors il existe deux entiers naturels n et m tels que : $y = x^n$ et $x = y^m$.

D'où : $x = x^{nm}$. Par suite $nm = 1$, d'où $n = 1$ et $m = 1$ (puisque n et m sont dans \mathbb{N}).

On en déduit que $y = x$.

Ainsi : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies (x = y)$. La relation \mathcal{R} est donc antisymétrique.

► **Transitivité.** Soient x, y et z trois réels > 0 . Supposons que : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$.

Alors il existe deux entiers naturels n et m tels que : $y = x^n$ et $z = y^m$.

On en déduit que : $z = x^{nm}$. Donc : $x\mathcal{R}z$.

Ainsi : $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies (x\mathcal{R}z)$. La relation \mathcal{R} est donc transitive.

Conclusion intermédiaire. La relation \mathcal{R} est réflexive, antisymétrique et transitive. C'est donc une relation d'ordre sur \mathbb{R}_+^* .

En revanche, cette relation d'ordre n'est pas totale. En effet, pour tout entier naturel n , on a $2^n \neq \frac{1}{2}$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^n \neq 2$. Il s'ensuit que l'on n'a pas $\frac{1}{2}\mathcal{R}2$, ni $2\mathcal{R}\frac{1}{2}$.

Conclusion. La relation \mathcal{R} est une relation d'ordre (non totale) sur \mathbb{R}_+^* .

Remarque. Pour cette relation d'ordre \mathcal{R} , \mathbb{R}_+^* admet un plus grand élément, qui est 1.

EXERCICE 4. — **RELATION D'ÉQUIVALENCE SUR $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$** . On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

On dira que (u_n) et (v_n) sont **équivalentes**, et on notera $(u_n) \sim (v_n)$ s'il existe une suite réelle (φ_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \varphi_n u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

1/ Etablir que la relation \sim est une relation d'équivalence sur E .

Il suffit de vérifier les 3 axiomes caractérisant les relations d'équivalence : réflexivité, symétrie, transitivité.

► **Réflexivité.** Soit (u_n) une suite réelle. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 \times u_n$ ("la suite (φ_n) constante égale à 1 convient"). Donc : $(u_n) \sim (u_n)$.

Ainsi : $\forall (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(u_n) \sim (u_n)$. La relation \sim est donc réflexive.

► **Symétrie.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Supposons que : $(u_n) \sim (v_n)$. Alors il existe une suite réelle (φ_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

Puisque la suite (φ_n) a pour limite 1, on peut supposer que ses termes sont non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\varphi_n} v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi_n} = 1$$

On en déduit que : $(v_n) \sim (u_n)$.

Ainsi : $\forall ((u_n), (v_n)) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$, $((u_n) \sim (v_n)) \implies ((v_n) \sim (u_n))$. La relation \sim est donc symétrique.

► **Transitivité.** Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites réelles. Supposons que : $(u_n) \sim (v_n)$ et $(v_n) \sim (w_n)$. Alors il existe deux suites réelles (φ_n) et (ψ_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \psi_n v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n = 1$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = (\psi_n \varphi_n) u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\psi_n \varphi_n) = 1$$

En d'autres termes : $(u_n) \sim (w_n)$.

Ainsi : $\forall ((u_n), (v_n), (w_n)) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^3$, $((u_n) \sim (v_n) \text{ et } (v_n) \sim (w_n)) \implies ((u_n) \sim (w_n))$. La relation \sim est donc transitive.

Conclusion. La relation \sim est réflexive, symétrique et transitive. C'est donc une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2/ On suppose que $(u_n) \sim (v_n)$, et que la limite de (v_n) existe. Etablir que la limite de (u_n) existe, et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Par hypothèse, il existe une suite réelle (φ_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

Puisque, par hypothèse encore, la limite de (u_n) existe, on en déduit que celle de (v_n) existe et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Conclusion. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que la limite de (u_n) existe. Alors :

$$((u_n) \sim (v_n)) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \right)$$

Remarques. Ce résultat sera en pratique très important pour lever des indéterminations dans les calculs de limites de suites (au second semestre).

On doit aussi observer que la réciproque de l'implication ci-dessus est fautive. Les suites de termes généraux respectifs $u_n = n$ et $v_n = n^2$ ont même limite, mais on n'a pas $(u_n) \sim (v_n)$.

3/ Déterminer un équivalent simple de u_n , puis en déduire la limite de u_n dans chacun des cas suivants :

$$\text{a/ } u_n = 2n^2 + 1 - \ln(n) + \cos(n) \quad \text{b/ } u_n = \sqrt{n} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{c/ } u_n = (n^2 - n) \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$$

a/ Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = 2n^2 \left(\underbrace{1 - \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{\cos(n)}{n^2}}_{=\varphi_n} \right)$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} = 0$ (croissances comparées) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0$ (gendarmes), on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$.

Conclusion. $u_n \sim 2n^2$. D'après la question précédente : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 + 1 - \ln(n) + \cos(n) = +\infty$

b/ Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Par suite :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Donc :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\underbrace{1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)}_{=\varphi_n} \right) \quad \text{avec : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Il est alors clair que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$.

Conclusion. $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. D'après la question précédente : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

c/ Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3} \varepsilon\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{avec : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n^3}\right) = 0$$

$$\text{Et : } n^2 - n = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Donc :

$$u_n = \frac{1}{n} \left[\underbrace{\left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{=\varphi_n} \right]$$

Il est de nouveau clair que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$.

Conclusion. $u_n \sim \frac{1}{n}$. D'après la question précédente : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - n) \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = 0$.

EXERCICE 5. — RELATION D'ÉQUIVALENCE SUR \mathbb{R}^I . On note $E = \mathbb{R}^I$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs réelles, où I désigne un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} .

Soit a un élément quelconque de I ; soient f et g deux fonctions de E .

On dira que f et g sont **équivalentes au voisinage de a** , et on notera $f \sim_a g$ s'il existe une fonction $\varphi \in E$ telle que :

$$\forall x \in I, \quad g(x) = \varphi(x)f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$$

1/ Etablir que la relation \sim est une relation d'équivalence sur E .

Copier-coller-adapter de la question 1 de l'exercice précédent.

2/ On suppose que $f \sim_a g$, et que la limite de g en a existe. Etablir que la limite de f en a existe, et que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Copier-coller-adapter de la question 2 de l'exercice précédent.

3/ **Application.** Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 7x + 3 \cos(x); \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - x \ln(x)}; \quad \ell_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{2x^2 - \sin(x) + \sqrt{x} - 4}$$

- ▶ On a : $x^2 - 7x + 3 \cos(x) \sim_{+\infty} x^2$. D'où : $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 7x + 3 \cos(x) = +\infty$.
- ▶ On a : $\sqrt{x^3 - x \ln(x)} \sim_{+\infty} x^{3/2}$. D'où : $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - x \ln(x)} = +\infty$.
- ▶ On a : $\frac{x^4 - 2x^3 + 1}{2x^2 - \sin(x) + \sqrt{x} - 4} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{2}$. D'où : $\ell_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{2x^2 - \sin(x) + \sqrt{x} - 4} = +\infty$.

PROPRIÉTÉ DE LA BORNE SUPÉRIEURE (DANS \mathbb{R}).

NB : Dans les exercices qui suivent, on se place dans (\mathbb{R}, \leq) , c'est-à-dire dans l'ensemble des réels muni de ce que l'on appelle sa relation d'ordre usuelle.

EXERCICE 6. — Les parties suivantes de \mathbb{R} sont-elles minorées ? Majorées ? Bornées ? Admettent-elles un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

$$\begin{array}{l}
 1/ A = [0; 2[\\
 2/ B = \{n^2 / n \in \mathbb{Z}\} \\
 3/ C = \left\{ \frac{1}{n+1} / n \in \mathbb{N} \right\} \\
 4/ D = \{\arctan(n) / n \in \mathbb{N}\} \\
 5/ E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} / n \in \mathbb{N} \right\} \\
 6/ F = \{\sin(n) / n \in \mathbb{N}\}
 \end{array}$$

- ▶ A est bornée, et : $\min A = \inf A = 0$; $\sup A = 2$; mais A n'a pas de plus grand élément (“ $\max A$ n'existe pas”).
- ▶ B est minorée, non majorée : $\min B = \inf B = 0$; B n'a pas de plus grand élément, ni de borne supérieure (“ $\max B$ et $\sup B$ n'existent pas”).
- ▶ C est bornée, et : $\max C = \sup C = 1$; $\inf C = 0$; mais C n'a pas de plus petit élément (“ $\min C$ n'existe pas”).
- ▶ D est bornée, et : $\min D = \inf D = 0$; $\sup D = \frac{\pi}{2}$; mais D n'a pas de plus grand élément (“ $\max D$ n'existe pas”).
- ▶ Les premiers éléments de E sont : $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$ E est bornée, et : $\min E = \inf E = -\frac{1}{2}$; $\sup E = \max E = 1$.
- ▶ F est bornée, et $\sup F = 1$, $\inf F = -1$; mais F ne possède ni plus grand, ni plus petit élément (aucun de ces résultats ne peut être démontré simplement).

EXERCICE 7. — Soient A et B deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} . On note :

$$A + B = \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$$

Montrer que : $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Soit x un élément de $A + B$; il existe un couple (a, b) de $A \times B$ tel que $x = a + b$. Puisque $a \leq \sup A$ et $b \leq \sup B$, on a : $x \leq \sup A + \sup B$. Ce raisonnement tenant pour un élément arbitraire de $A + B$, on en déduit que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$; d'où $\boxed{\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B \spadesuit}$.

▶ Soient a et b deux éléments quelconques de A et B respectivement. On a : $a = (a + b) - b$. En particulier : $a \leq \sup(A + B) - b$.

On en déduit que pour tout $b \in B$, $\sup(A + B) - b$ est un majorant de A .

D'où : $\sup A \leq \sup(A+B) - b$ pour tout $b \in B$. D'où : $\forall b \in B, b \leq \sup(A+B) - \sup A$.

Par suite $\sup(A+B) - \sup A$ est un majorant de B , donc : $\sup B \leq \sup(A+B) - \sup A$.

D'où $\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$ (\clubsuit)

Conclusion : on déduit de (\spadesuit) et de (\clubsuit) que : $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

EXERCICE 8. — Soient A et B deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} .

Montrer que : $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Puisque $A \subset (A \cup B)$ et $B \subset (A \cup B)$, on a déjà $\sup A \leq \sup(A \cup B)$ et $\sup(B) \leq \sup(A \cup B)$. Par suite : $\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$.

Réciproquement, soit $x \in A \cup B$. Alors $x \leq \sup A$ (si $x \in A$) ou $x \leq \sup B$ (si $x \in B$).

Donc $x \leq \max(\sup A, \sup B)$.

Il s'ensuit que $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$, d'où : $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$.

On en déduit finalement que : $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

EXERCICE 9. — Soient A et B deux parties non vides de \mathbb{R} . On suppose que : $\forall (a, b) \in A \times B, a \leq b$.

Montrer que : $\sup A \leq \inf B$.

Puisque B est non vide, il existe un élément b_0 dans B . Il résulte de l'hypothèse que : $\forall a \in A, a \leq b_0$.

Donc b_0 est un majorant de A . Puisque A est une partie non vide (par hypothèse) et majorée de \mathbb{R} , elle admet une borne supérieure : $\sup A$ existe.

De façon analogue, B admet une borne inférieure : $\inf B$ existe.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sup A > \inf B$. Posons alors : $\varepsilon = \frac{\sup A - \inf B}{3}$.

Par caractérisation de la borne supérieure (et de la borne inférieure), il existe un élément a de A et un élément b de B tels que :

$$\sup A - \varepsilon < a \leq \sup A \quad \text{et} \quad \inf B \leq b < \inf B + \varepsilon$$

Par suite :

$$b < \inf B + \varepsilon < \sup A - \varepsilon < a$$

En particulier : $b < a$. Or ceci contredit l'hypothèse : $\forall (a, b) \in A \times B, a \leq b$.

Par conséquent : $\sup A \leq \inf B$.

EXERCICE 10. — Montrer que l'ensemble $E = \{r^3 / r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans \mathbb{R} .

Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Alors : $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}$ (puisque la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt[3]{t}$ est strictement croissante).

Puisque \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , il existe un nombre rationnel r tel que : $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{y}$.

La fonction cube étant strictement croissante sur \mathbb{R} , on en déduit que : $x < r^3 < y$.

Ainsi, pour tout couple (x, y) de réels tels que $x < y$, il existe un élément α de E tel que : $x < \alpha < y$.

Conclusion. E est dense dans \mathbb{R} .

EXERCICE 11. — Plus généralement, montrer que l'ensemble $E = \{f(r) / r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans \mathbb{R} dès que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective et strictement monotone.

Supposons que f est bijective et strictement décroissante (par exemple). Alors sa bijection réciproque f^{-1} est strictement décroissante aussi.

Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Alors : $f^{-1}(x) > f^{-1}(y)$ (puisque f^{-1} est strictement décroissante).

Puisque \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , il existe un nombre rationnel r tel que : $f^{-1}(x) > r > f^{-1}(y)$.

La fonction f étant strictement décroissante sur \mathbb{R} , on en déduit que : $x < f(r) < y$.

Ainsi, pour tout couple (x, y) de réels tels que $x < y$, il existe un élément α de E tel que : $x < \alpha < y$.

Conclusion. E est dense dans \mathbb{R} .

Remarque. Démonstration analogue en supposant que f est strictement croissante.

PLUS EXOTIQUE.

EXERCICE 12. — Dans \mathbb{N} muni de la relation de divisibilité, on considère la partie $A = \{2, 3, 5\}$.

1/ Justifier que A est bornée, mais ne possède ni plus grand, ni plus petit élément.

➤ 1 divise tout élément de A ; c'est donc un minorant de A .

Tout élément de A divise 0; 0 est donc un majorant de A .

Ainsi, A est bornée.

➤ 2 ne divise pas 3; donc 2 ne minore pas A . 3 ne divise pas 5; donc 3 ne minore pas A . 5 ne divise pas 2; donc 5 ne minore pas A .

Ainsi A ne possède pas de plus petit élément.

➤ Les mêmes remarques que plus haut permettent d'affirmer que ni 2, ni 3, ni 5 n'est un majorant de A .

Ainsi A ne possède pas de plus grand élément.

2/ Déterminer $\sup A$ et $\inf A$.

➤ Si $\sup A$ existe, c'est le plus petit (pour la relation de divisibilité) entier divisible par 2, 3 et 5 : c'est donc le PPCM (plus petit commun multiple) des entiers 2, 3 et 5.

Ainsi : $\sup A = 30$.

➤ Si $\inf A$ existe, c'est le plus grand (pour la relation de divisibilité) entier divisant 2, 3 et 5 : dans \mathbb{N} , seul l'entier 1 vérifie cette propriété.

Ainsi : $\inf A = 1$.