EXERCICES 10 — RELATIONS BINAIRES — NOMBRES RÉELS

RELATIONS BINAIRES.

EXERCICE 1. — **CONGRUENCES.** Soit p un entier naturel ≥ 2 . On définit une relation binaire sur $\mathbb{N}$ appelée **relation de congruence modulo p** et notée $\equiv$ en posant

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \equiv m [p] \iff n - m \text{ est multiple de } p$$

On rappelle que l’assertion “ $n - m$ est multiple de p ” signifie qu’il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $n - m = kp$.

- 1/ Montrer que la relation de congruence modulo p est une relation d’équivalence sur $\mathbb{Z}$.
- 2/ Montrer que la relation de congruence modulo p est compatible avec la somme et le produit, dans le sens suivant. Pour tout quadruplet (a, b, c, d) d’entiers naturels :

$$(a \equiv c [p]) \wedge (b \equiv d [p]) \implies (a + b \equiv c + d [p]) \wedge (ab \equiv cd [p])$$

3/ Etablir que : $\forall (a, c, n) \in \mathbb{N}^3, (a \equiv c [p]) \implies (\forall n \in \mathbb{N}, a^n \equiv c^n [p])$

4/ Montrer que $2^{123} + 3^{121}$ est multiple de 11.

EXERCICE 2. — **ORDRE TOTAL SUR $\mathbb{C}$.** On définit une relation binaire (notée $\prec$) sur $\mathbb{C}$ en posant :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z \prec z' \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(z') \\ \text{ou} \\ \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

Etablir que la relation $\prec$ est une relation d’ordre totale sur $\mathbb{C}$.

EXERCICE 3. — On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant pour tout couple de réels (x, y) strictement positifs :

$$x \mathcal{R} y \iff \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d’ordre. Cet ordre est-il total ?

EXERCICE 4. — **RELATION D’ÉQUIVALENCE SUR $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.** On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l’ensemble des suites réelles.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

On dira que (u_n) et (v_n) sont **équivalentes**, et on notera $(u_n) \sim (v_n)$ s’il existe une suite réelle (φ_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \varphi_n u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

- 1/ Etablir que la relation $\sim$ est une relation d’équivalence sur E .
- 2/ On suppose que $(u_n) \sim (v_n)$, et que la limite de (v_n) existe. Etablir que la limite de (u_n) existe, et que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
- 3/ Déterminer un équivalent simple de u_n , puis en déduire la limite de u_n dans chacun des cas suivants :

$$\text{a/ } u_n = 2n^2 + 1 - \ln(n) + \cos(n) \quad \text{b/ } u_n = \sqrt{n} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{c/ } u_n = (n^2 - n) \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$$

EXERCICE 5. — **RELATION D'ÉQUIVALENCE SUR $\mathbb{R}^I$.** On note $E = \mathbb{R}^I$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs réelles, où I désigne un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Soit a un élément quelconque de I ; soient f et g deux fonctions de E .

On dira que f et g sont **équivalentes au voisinage de a** , et on notera $f \sim_a g$ s'il existe une fonction $\varphi \in E$ telle que :

$$\forall x \in I, \quad g(x) = \varphi(x)f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$$

1/ Etablir que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur E .

2/ On suppose que $f \sim_a g$, et que la limite de g en a existe. Etablir que la limite de f en a existe, et que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

3/ **Application.** Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 7x + 3 \cos(x); \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - x \ln(x)}; \quad \ell_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{2x^2 - \sin(x) + \sqrt{x} - 4}$$

PROPRIÉTÉ DE LA BORNE SUPÉRIEURE (DANS $\mathbb{R}$).

NB : Dans les exercices qui suivent, on se place dans $(\mathbb{R}, \leq)$, c'est-à-dire dans l'ensemble des réels muni de ce que l'on appelle sa relation d'ordre usuelle.

EXERCICE 6. — Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles minorées? Majorées? Bornées? Admettent-elles un plus grand élément? Un plus petit élément? Une borne supérieure? Une borne inférieure?

$$\begin{array}{l} 1/ A = [0; 2[\\ 2/ B = \{n^2 / n \in \mathbb{Z}\} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 3/ C = \left\{ \frac{1}{n+1} / n \in \mathbb{N} \right\} \\ 4/ D = \{\arctan(n) / n \in \mathbb{N}\} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 5/ E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} / n \in \mathbb{N} \right\} \\ 6/ F = \{\sin(n) / n \in \mathbb{N}\} \end{array} \right.$$

EXERCICE 7. — Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note :

$$A + B = \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$$

Montrer que : $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

EXERCICE 8. — Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

Montrer que : $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

EXERCICE 9. — Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que : $\forall (a, b) \in A \times B, a \leq b$.

Montrer que : $\sup A \leq \inf B$.

EXERCICE 10. — Montrer que l'ensemble $E = \{r^3 / r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 11. — Plus généralement, montrer que l'ensemble $E = \{f(r) / r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ dès que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective et strictement monotone.

PLUS EXOTIQUE.

EXERCICE 12. — Dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité, on considère la partie $A = \{2, 3, 5\}$.

1/ Justifier que A est bornée, mais ne possède ni plus grand, ni plus petit élément.

2/ Déterminer $\sup A$ et $\inf A$.