Colle 10 – Questions de cours

Question de cours n°1 — **Théorème (solution générale d'une EDL1 homogène)**. Soient $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, a ne s'annulant pas sur I. Les solutions de l'EDL $a(x)y' + b(x)y = 0$ sont les fonctions $f_k : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définies sur I par $f_k(x) = k\mathrm{e}^{-A(x)}$ $(k \in \mathbb{K})$, où A désigne une primitive sur I de la fonction $\dfrac{b}{a}$.

Preuve. Notons (E) l'EDL : $a(x)y' + b(x)y = 0$. La fonction b/a est continue sur I, en tant que quotient de fonctions continues sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I. A ce titre, b/a admet des primitives sur I ; notons A l'une d'entre elles.

Soit φ une solution de (E). Introduisons alors une fonction auxiliaire g en posant : $\forall\, x \in I,\ g(x) = \varphi(x)\mathrm{e}^{A(x)}$.

La fonction g est dérivable (et même de classe $\mathscr{C}^1$) sur I, et :

$$\forall\, x \in I,\ g'(x) = \varphi'(x)\mathrm{e}^{A(x)} + \frac{b(x)}{a(x)}\varphi(x)\mathrm{e}^{A(x)} \iff \iff \forall\, x \in I,\ g'(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\left(\varphi'(x) + \frac{b(x)}{a(x)}\varphi(x)\right)$$

Et la fonction a ne s'annulant pas sur I, cette dernière assertion est encore équivalente à la suivante :

$$\forall\, x \in I,\ a(x)g'(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\underbrace{\left(a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x)\right)}_{=0}$$

la nullité de la parenthèse du terme de droite provenant de ce que φ est solution de (E).

Par suite : $\forall\, x \in I,\ a(x)g'(x) = 0$ d'où $\forall\, x \in I,\ g'(x) = 0$ (puisque a ne...). Il s'ensuit que g est constante sur I, explicitement :

$$\exists\, k \in \mathbb{K},\ g(x) = k \iff \exists\, k \in \mathbb{K},\ \varphi(x)\mathrm{e}^{A(x)} = k \iff \exists\, k \in \mathbb{K},\ \varphi(x) = k\mathrm{e}^{-A(x)}$$

On vient donc d'établir que toute solution de (E) est "de la forme $k\mathrm{e}^{-A(x)}$".

La réciproque (toute fonction "de la forme $k\mathrm{e}^{-A(x)}$" est solution de (E)) est une vérification aisée qui permet de conclure :

Les solutions de l'EDL $a(x)y' + b(x)y = 0$ sont les fonctions $f_k : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définies sur I par $f_k(x) = k\mathrm{e}^{-A(x)}$ $(k \in \mathbb{K})$.

Question de cours n°2 — **Physique-Maths**. Oscillateur harmonique libre, sans frottements (résolution de $y'' + \omega_0^2 y = 0$). Solution générale peut s'écrire $f_{K,\varphi}(t) = K\cos(\omega_0 t - \varphi)$

On suppose que $\omega_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et on note (H) l'équation différentielle linéaire du second ordre : $y'' + \omega_0^2 y = 0$. L'équation caractéristique associée possède deux racines complexes conjuguées $\pm \mathrm{i}\omega_0$. *

On en déduit que la solution générale † est : $\forall\, (t, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3,\ f_{\lambda,\mu}(t) = \lambda\cos(\omega_0 t) + \mu\sin(\omega_0 t)$.

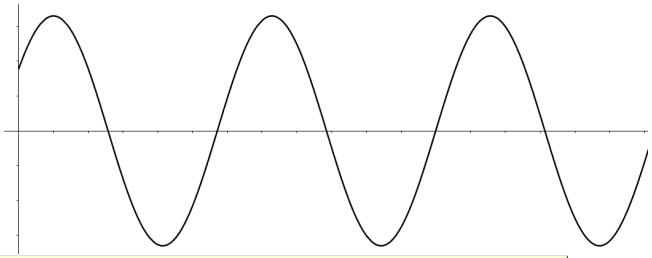
Fixons à présent les réels t, λ et μ, avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. On écrit :

$$f_{\lambda,\mu}(t) = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\cos(\omega_0 t) + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\sin(\omega_0 t)\right) \qquad \text{puis on pose : } X = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \text{ et } Y = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$$

Le couple de réels (X, Y) vérifie clairement la relation $X^2 + Y^2 = 1$. Par suite, le complexe $X + \mathrm{i}\,Y$ est un élément de $\mathbb{U}$, et il existe donc un unique réel $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que $X = \cos\varphi$ et $Y = \sin\varphi$. Par suite :

$f_{\lambda,\mu}(t) = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}\,(\cos\varphi\cos(\omega_0 t) + \sin\varphi\sin(\omega_0 t))$ d'où : $f_{\lambda,\mu}(t) = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}\cos(\omega_0 t - \varphi)$

Le cas $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ est trivial (prendre $K = 0$ et φ arbitraire).



Conclusion. La solution générale de (H) est : $\forall\, (t, K, \varphi) \in \mathbb{R}^3,\ f_{K,\varphi}(t) = K\cos(\omega_0 t - \varphi)$ (**régime périodique**).

Question de cours n°3— **Physique-Maths (2)**. Oscillateur harmonique libre, avec frottements (résolution de $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = 0$). Solution générale dans les trois cas.

On considère l'EDL2 : (H) $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = 0$ avec m et ω_0 strictement positifs. L'équation caractéristique associée est : (EC) $X^2 + 2mX + \omega_0^2 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = 4\left(m^2 - \omega_0^2\right)$.

On distingue alors trois cas :

➤ Si $\Delta < 0$ (càd si : $m < \omega_0$) : alors l'équation (EC) possède deux racines complexes conjuguées $-m \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - m^2}$. Dans ce cas ("frottements faibles"), la solution générale de (H) est :

∗. Qui sont effectivement distinctes puisque ω_0 est non nul par hypothèse.

†. Càd l'ensemble des fonctions solutions de (H) à valeurs *réelles*.

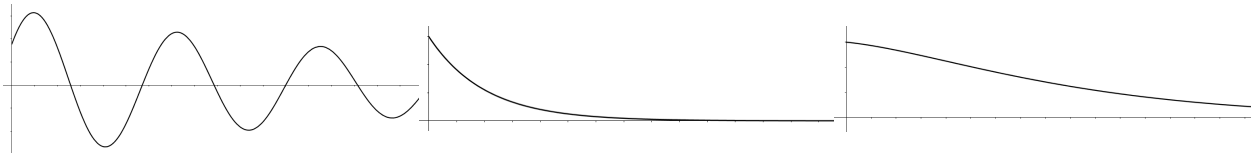
$\forall\ (t,\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^3,\ f_{\lambda,\mu}(t)=\left(\lambda\cos\left(\left(\sqrt{\omega_0^2-m^2}\right)t\right)+\mu\sin\left(\left(\sqrt{\omega_0^2-m^2}\right)t\right)\right)\mathrm{e}^{-mt}$ (**régime pseudo-périodique**).

➤ Si $\Delta=0$ (càd si : $m=\omega_0$) : alors l'équation (EC) possède une racine double (réelle) : $-m$. Dans ce cas, la solution générale de (H) est :

$\forall\ (t,\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^3,\ f_{\lambda,\mu}(t)=(\lambda t+\mu)\,\mathrm{e}^{-mt}$ (**régime critique**).

➤ Si $\Delta>0$ (càd si : $m>\omega_0$) : alors l'équation (EC) possède deux racines réelles $X_{1,2}=-m\pm\sqrt{m^2-\omega_0^2}$. Dans ce cas ("frottements importants"), la solution générale de (H) est :

$\forall\ (t,\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^3,\ f_{\lambda,\mu}(t)=\lambda\mathrm{e}^{X_1 t}+\mu\mathrm{e}^{X_2 t}$ (**régime apériodique**).



Cas $\Delta<0$ (régime pseudo-périodique) — Cas $\Delta=0$ (régime critique) — Cas $\Delta>0$ (régime apériodique)

Question de cours n^{0}4 — **Propriété**. Soient a, b et α trois scalaires. On note (E) l'EDL2 : $y''+ay'+by=\mathrm{e}^{\alpha x}$; et on note encore (EC) $X^2+aX+b=0$ l'équation caractéristique associée à (E).
Si α n'est pas racine de (EC), alors l'équation (E) possède une solution particulière f_P avec : $\forall x\in\mathbb{R},\ f_P(x)=K\mathrm{e}^{\alpha x}$, pour un certain $K\in\mathbb{K}$.

Prouvons la propriété. Avec les notations et hypothèses de l'énoncé, α n'est pas racine de (EC). Alors : $\alpha^2+a\alpha+b\neq 0$.

Soit K un scalaire[‡]. Posons : $\forall x\in\mathbb{R},\ f_P(x)=K\mathrm{e}^{\alpha x}$. La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : ${f_P}'(x)=\alpha K\mathrm{e}^{\alpha x}$ et ${f_P}''(x)=\alpha^2 K\mathrm{e}^{\alpha x}$.

Ainsi, pour tout réel x on a : ${f_P}''(x)+a{f_P}'(x)+bf_P(x)=K\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha^2+a\alpha+b\right)$.

Puisque $\mathrm{e}^{\alpha x}$ est non nul pour tout réel x, on en déduit que :

$$[f_P\text{ est solution de }(E)]\iff\left[K\left(\alpha^2+a\alpha+b\right)=1\right]\iff\left[K=\frac{1}{\alpha^2+a\alpha+b}\right]$$

La dernière égalité étant rendue légitime par le fait que α n'est pas racine de (EC).

On peut alors conclure que la fonction f_P définie en posant : $\forall x\in\mathbb{R},\ f_P(x)=\dfrac{1}{\alpha^2+a\alpha+b}\,\mathrm{e}^{\alpha x}$, est solution de (E).

Question de cours n^{0}5 — **Exo – Application du principe de superposition :** résolution de $y''-3y'+2y=2\mathrm{ch}(x)$.

➤ Résolution de l'équation homogène associée : (H) $y''-3y'+2y=0$. L'équation caractéristique a 1 et 2 comme racines. Par suite, la solution générale de (H) (à valeurs réelles) est :

$$f_{\lambda,\mu}:x\in\mathbb{R}\longmapsto\ \lambda\mathrm{e}^{x}+\mu\mathrm{e}^{2x}\quad\text{(avec }\lambda\text{ et }\mu\text{ réels)}\qquad(\heartsuit)$$

➤ Recherche d'une solution particulière. On introduit l'équation (E_1) : $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{-x}$.
Puisque -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, (E_1) admet une solution particulière de la forme $K\mathrm{e}^{-x}$ (avec K réel). Posons donc : $\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi(x)=K\mathrm{e}^{-x}$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$), et on peut donc calculer ses dérivées successives. Pour tout réel x, on a clairement : $\varphi'(x)=-K\mathrm{e}^{-x}$ et $\varphi''(x)=K\mathrm{e}^{-x}$. Il s'ensuit que φ est solution de (E_1) si et seulement si :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ K\mathrm{e}^{-x}(1+3+2)=\mathrm{e}^{-x}\iff K=\frac{1}{6}$$

On en déduit que la fonction : $f:x\in\mathbb{R}\longmapsto\dfrac{1}{6}\,\mathrm{e}^{-x}$ est solution de (E_1) $(\spadesuit)$.

On introduit à présent l'équation (E_2) : $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{x}$.

‡. Comme indiqué en cours, un scalaire est un élément de $\mathbb{K}$, càd un nombre réel ou complexe.

Puisque 1 est racine simple de l'équation caractéristique, (E_2) admet une solution particulière de la forme Kxe^x (avec K réel). Posons donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = Kxe^x$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}\ldots$ Pour tout réel x, on a clairement : $\varphi'(x) = Ke^x(x+1)$ et $\varphi''(x) = Ke^x(x+2)$. Il s'ensuit que φ est solution de (E_2) si et seulement si :

$\forall x \in \mathbb{R},\ Ke^x(x+2-3x-3+2x) = e^x \iff K = -1$

On en déduit que la fonction : $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto -xe^x$ est solution de (E_2) (♣).

➤ D'après (♣), (♠) et le principe de superposition, on peut affirmer que la fonction :

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{6}e^{-x} - xe^x \text{ est solution de } (E) \ (\diamondsuit)$$

➤ D'après (♡) et (♢), la solution générale de (E) est :

$$f_{\lambda,\mu} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{6}e^{-x} - xe^x + \lambda e^x + \mu e^{2x} \quad (\text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels})$$

QUESTION DE COURS N^{0}6 — **Exercice — Application du "pont $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{C}$" pour les EDL :** résolution de $y'' - 4y' + 3y = e^x \sin(\omega x)$ (cas réel, avec $\omega > 0$).

➤ Résolution de l'équation homogène associée : (H) $y'' - 4y' + 3y = 0$. L'équation caractéristique a 1 et 3 comme racines. Par suite, la solution générale de (H) (à valeurs réelles) est :

$$f_{\lambda,\mu} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda e^x + \mu e^{3x} \quad (\text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels})$$

➤ Recherche d'une solution particulière. On introduit l'équation (E') : $y'' - 4y' + 3y = e^{(1+i\omega)x}$.

Puisque $1 + i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, (E') admet une solution particulière de la forme $Ke^{1+i\omega x}$ (avec K complexe). Posons donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = Ke^{(1+i\omega)x}$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$), et on peut donc calculer les dérivées successives de φ. Pour tout réel x, on a clairement : $\varphi'(x) = (1+i\omega)Ke^{(1+i\omega)x}$ et $\varphi''(x) = \left(1 - \omega^2 + 2i\omega\right)Ke^{(1+i\omega)x}$. Il s'ensuit que φ est solution de (E') si et seulement si :

$\forall x \in \mathbb{R},\ Ke^{(1+i\omega)x}\left[\left(1-\omega^2+2i\omega\right) - 4(1+i\omega) + 3\right] = e^{(1+i\omega)x} \iff \forall x \in \mathbb{R},\ \left(-\omega^2 - 2i\omega\right)Ke^{ix} = e^{ix}$

$$\iff -K\left(\omega^2 + 2i\omega\right) = 1 \iff K = -\frac{1}{\omega^2 + 2i} \iff K = -\frac{\omega^2}{\omega^4+4} + \frac{2i}{\omega^4+4}$$

On en déduit que la fonction $F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \left(-\frac{\omega^2}{\omega^4+4} + \frac{2i}{\omega^4+4}\right)e^{(1+i\omega)x}$ est solution de (E'). Il ne reste plus qu'à en déterminer la partie imaginaire pour avoir une solution de (E). Explicitement, la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{e^x}{\omega^4+4}\left(2\cos(\omega x) - \omega^2 \sin(\omega x)\right)$$

est une solution particulière de (E).

Conclusion. La solution générale de l'équation (E) $y'' - 4y' + 3y = e^x \sin(\omega x)$ est

$$\varphi : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{e^x}{\omega^4+4}\left(2\cos(\omega x) - \omega^2 \sin(\omega x)\right) + \lambda e^x + \mu e^{3x} \quad (\text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels})$$

Complément – Géométrie des équations différentielles

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul du plan réel. L'ensemble des multiples de $\overrightarrow{u}$:

$$\mathbb{R}\,\overrightarrow{u} = \{\lambda\,\overrightarrow{u} \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

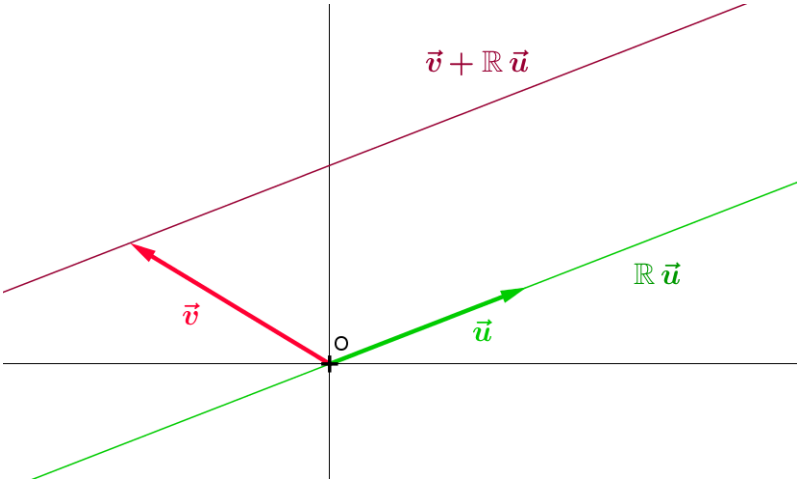
est une droite qui passe par l'origine du plan (on parle alors de droite *vectorielle*).

Considérons un second vecteur $\overrightarrow{v}$, non colinéaire à $\overrightarrow{u}$. L'image de $\mathbb{R}\,\overrightarrow{u}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ est une droite :

$$\overrightarrow{v} + \mathbb{R}\,\overrightarrow{u} = \{\overrightarrow{v} + \lambda\,\overrightarrow{u} \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

qui bien évidemment ne passe plus par l'origine du plan (on parle alors de droite *affine*).

Ces considérations sont illustrées par le graphique ci-dessous !



Fin du premier acte.

Sous les hypothèses que vous connaissez par cœur, l'ensemble des solutions d'une EDL1 homogène ($ay' + by = 0$) est l'ensemble des multiples de e^{-A}, où A désigne une primitive de b/a. On peut donc noter cet ensemble :

$$\mathbb{R}\,\mathrm{e}^{-A} = \left\{\lambda\,\mathrm{e}^{-A} \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

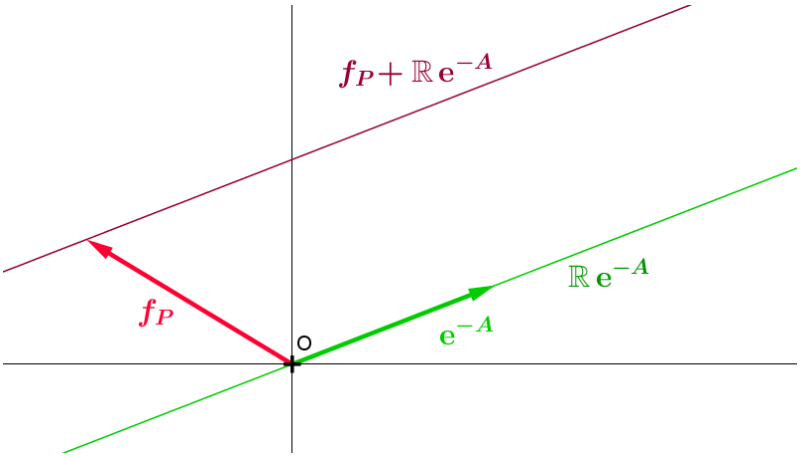
Par analogie avec la situation précédente, on dira que c'est une droite vectorielle (dans l'espace $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$).

Considérons à présent une solution particulière f_P de l'EDL1 $ay' + by = c$ (avec c non nulle). La fonction f_P est non colinéaire à e^{-A} (sinon elle serait solution de l'équation homogène). L'image de $\mathbb{R}\,\mathrm{e}^{-A}$ par la translation de "vecteur" f_P

$$f_P + \mathbb{R}\,\mathrm{e}^{-A} = \left\{f_P + \lambda\,\mathrm{e}^{-A} \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

est une droite affine (dans l'espace $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$).

Ces considérations sont illustrées par le graphique ci-dessous !



Remarque : de façon analogue, l'ensemble des solutions d'une EDL2 sans second membre est un plan vectoriel, et l'ensemble des solutions d'une EDL2 avec second membre est un plan affine.