MPSI – Colle 10 (5 au 9 décembre 2022) : EDL1 & 2

Chapitre 9 : Equations différentielles linéaires

Convention : dans ce chapitre, I est un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$.

Méthode “universelle” de résolution pour une EDL 1 ou 2 :

(i) Résolution de l'équation homogène (H) associée à (E)

(ii) Détermination d'une solution particulière de (E)

(iii) Conclusion : la solution générale de (E) est $S_H + S_P$ où S_H désigne la solution générale de (H) et S_P une solution particulière de (E).

1 – Equations différentielles linéaires d'ordre 1 (EDL1)

Théorème (solution générale d'une EDL1 homogène). Soient $a, b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues, a ne s'annulant pas sur I. Les solutions de l'EDL $a(x)y' + b(x)y = 0$ sont les fonctions $f_C : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définies sur I par $f_C(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)}$ ($C \in \mathbb{K}$), où A désigne une primitive sur I de la fonction $\dfrac{b}{a}$.

Pour le second point, on peut utiliser la **méthode de variation de la constante**, en cherchant une solution particulière f_P de l'équation avec second membre sous la forme “$f_P(x) = C(\underline{\underline{x}})\mathrm{e}^{-A(x)}$”.

Théorème (existence et unicité de la solution à un problème de Cauchy d'ordre 1). Soient a, b et c trois fonctions de $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$, tque a ne s'annule pas sur I. On note (E) l'EDL1 : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$.
Pour tout couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique fonction $\varphi \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ tq :

$$\begin{cases} \forall x \in I, \quad a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x) = c(x) \\ \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

2 – Equations différentielles linéaires d'ordre 2 (EDL2)

Dans ce paragraphe, on supposera que **les coefficients de l'EDL2 sont constants**, c'est-à-dire que l'on considèrera l'équation

$$\boxed{(E)\ ay'' + by' + cy = d(x), \text{ avec } a, b \text{ et } c \text{ dans } \mathbb{K},\ a \neq 0 \text{ et } d \text{ dans } \mathbb{K}^I}.$$

(i) La solution pour le premier point est donnée par les deux énoncés suivants :

Théorème (solution générale d'une EDL2 homogène, cas complexe). Mêmes notations que ci-dessus (avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Si l'équation caractéristique $aX^2 + bX + c = 0$ possède :

- une racine double α_0 $(\Delta = 0)$: les solutions de (H) sont les fonctions $f_{\lambda,\mu} : I \longrightarrow \mathbb{C}$ définies par : $f_{\lambda,\mu}(t) = (\lambda t + \mu)\,\mathrm{e}^{\alpha_0\, t}$ (λ et μ complexes)
- deux racines distinctes α et β $(\Delta \neq 0)$: les solutions de (H) sont les fonctions $f_{\lambda,\mu} : I \longrightarrow \mathbb{C}$ définies par : $f_{\lambda,\mu}(t) = \lambda\mathrm{e}^{\alpha\, t} + \mu\mathrm{e}^{\beta\, t}$ (λ et μ complexes)

Théorème (solution générale d'une EDL2 homogène, cas réel). Mêmes notations que précédemment. Si l'équation caractéristique possède :

- deux racines réelles α et β $(\Delta > 0)$: les solutions de (H) sont les fonctions $f_{\lambda,\mu} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par : $f_{\lambda,\mu}(t) = \lambda\mathrm{e}^{\alpha\, t} + \mu\mathrm{e}^{\beta\, t}$ (λ et μ réels)
- une racine double α_0 $(\Delta = 0)$: les solutions de (H) sont les fonctions $f_{\lambda,\mu} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par : $f_{\lambda,\mu}(t) = (\lambda t + \mu)\,\mathrm{e}^{\alpha_0\, t}$ (λ et μ réels)
- deux racines complexes conjuguées $\alpha = u + iv$ et $\beta = u - iv$ $(\Delta < 0)$: les solutions de (H) sont les fonctions $f_{\lambda,\mu} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par : $f_{\lambda,\mu}(t) = \mathrm{e}^{ut}(\lambda\cos(vt) + \mu\sin(vt))$ (λ et μ réels).

(ii) Et pour le second point (recherche d'une solution particulière de (E)), on se restreint à la recherche d'une solution particulière lorsque le second membre est de la forme $A\mathrm{e}^{\alpha\, x}$ (A désignant un scalaire).

Propriété (solution particulière d'une EDL2). Soient a, b, A et α quatre scalaires (4 éléments de $\mathbb{K}$). Notons (E) $y'' + ay' + by = A\mathrm{e}^{\alpha\, x}$. Si le scalaire α…

- n'est pas racine de l'équation caractéristique : alors (E) admet une solution particulière de la forme $K\mathrm{e}^{\alpha\, x}$ ($\lambda \in \mathbb{K}$) ;
- est racine de l'équation caractéristique, mais pas racine double $(\Delta \neq 0)$: alors (E) admet une solution particulière de la forme $Kx\mathrm{e}^{\alpha\, x}$ ($\lambda \in \mathbb{K}$) ;
- est racine double de l'équation caractéristique $(\Delta = 0)$: alors (E) admet une solution particulière de la forme $Kx^2\mathrm{e}^{\alpha\, x}$ ($\lambda \in \mathbb{K}$).

Propriété ("Pont $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{C}$" pour les EDL). Soient a et b deux réels.
Soient $c \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\varphi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors :
[φ est solution de $y'' + ay' + by = c$]

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{Re}\,(\varphi) \text{ est solution de } y'' + ay' + by = \mathrm{Re}(c) \\ \\ \mathrm{Im}\,(\varphi) \text{ est solution de } y'' + ay' + by = \mathrm{Im}(c) \end{array}\right]$$

Application : résolution de $y'' - 5y' + 6y = \cos(x)$.

Propriété (principe de superposition des solutions particulières). Soient a, b deux scalaires ; $(c_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ n fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour tout entier i compris entre 1 et n, on note

$$(E_i) : \quad y'' + ay' + by = c_i$$

On suppose encore que $f_1, \ldots, f_n$ sont n fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, telles que f_i est solution de (E_i) pour tout $i \in [\![\, 1, n \,]\!]$.

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i$ est solution de l'EDL : $(E) \quad y'' + ay' + by = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i$

Application : résolution de $y'' - 3y' + 2y = 2\mathrm{ch}(x)$.

3 – Exemple d'application : l'oscillateur harmonique $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = \ldots$

➤ EDL de l'oscillateur harmonique libre

On considère ici l'équation $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = 0$ avec $m > 0$.

Trois cas sont à distinguer : $m < \omega_0$, $m = \omega_0$, ou $m > \omega_0$.

➤ EDL de l'oscillateur harmonique forcé

On considère ici l'équation $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = A\cos(\omega t)$ avec $A > 0$ et $\omega > 0$.

Par rapport à l'étude précédente, outre le fait que l'on doit trouver une solution particulière de l'équation avec second membre, on doit distinguer un nouveau sous-cas : celui où $m = 0$ et $\omega = \omega_0$ (résonance).

Questions de cours

- ➤ **Théorème**. Solution générale d'une EDL1 homogène.
- ➤ **Physique-Maths**. Oscillateur harmonique libre, sans frottements (résolution de $y'' + \omega_0^2 y = 0$). Solution $\underline{\text{ale}}$ peut s'écrire $f_{K,\varphi}(t) = K\cos(\omega_0 t - \varphi)$.
- ➤ **Physique-Maths (2)**. Oscillateur harmonique libre, avec frottements (résolution de $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = 0$). Solution générale dans les trois cas.
- ➤ **Propriété** : solution particulière d'une EDL2 avec second membre de la forme $\mathrm{e}^{\alpha x}$, avec α non racine de l'équation caractéristique.
- ➤ **Exercice (application du principe de superposition**. Résolution de $y'' - 3y' + 2y = 2\mathrm{ch}(x)$.
- ➤ ***Sur le principe du volontariat.*** **Exercice (application du "pont $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{C}$" pour les EDL).** Résolution de $y'' - 4y' + 3y = \mathrm{e}^x \sin(\omega x)$ (cas réel, avec $\omega > 0$).

Objectifs de la semaine

- ➤ Connaître le plan et la méthode de résolution d'une EDL1 (en particulier la méthode de variation de la constante)
- ➤ Déterminer la primitive d'une fonction (primitives usuelles, IPP, changement de variable)
- ➤ Connaître le plan et la méthode de résolution d'une EDL2 (en particulier les différentes techniques de recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre)
- ➤ Afin de maîtriser les 3 points précédents : vous entraîner, vous entraîner, vous entraîner (par exemple en refaisant les calculs de primitives, et les résolutions d'EDL1 et 2 du cours).