EXERCICES 11 – SUITES RÉELLES ET COMPLEXES

GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES RÉELLES

EXERCICE 1. — (Limites "usuelles"). Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants, si elle existe :

1/ $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n+1}$

2/ $u_n = \sqrt[n]{n^2}$

3/ $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$

4/ $u_n = \dfrac{n^4 - 3n^3 + 2n - 5}{4n^2 + n + 1}$

5/ $u_n = \dfrac{e^n - n^2}{2e^n - 3n + 1}$

6/ $u_n = e^{-2n}\cos(n)$

EXERCICE 2. — (Retour à la définition). Montrer que la suite de terme général e^n tend vers $+\infty$.[*]

EXERCICE 3. — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie en posant : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sin(t)\,dt$.

1/ Justifier que (u_n) est une suite positive, puis montrer qu'elle décroissante.

2/ Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la limite de (u_n).

EXERCICE 4. — Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 (t-1)^{2n+3}\arctan(t)\,dt$ converge et préciser sa limite.

EXERCICE 5. — Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 \sin^n(t)e^{-t/2}\,dt$ converge et préciser sa limite.

EXERCICE 6. — (Suites de sommes partielles : un pas vers les séries numériques) — Déterminer la limite de la suite (S_n) dans chacun des cas suivants, si elle existe :

1) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$

2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

3) $S_n = \displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$

4) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$

EXERCICE 7. — (Limites et DL1). Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants, si elle existe :

1/ $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

2/ $u_n = n\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

3/ $^{(\star)}$ $u_n = \dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$

EXERCICE 8. — On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}\arctan(x)$ où x est un réel arbitraire. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

EXERCICE 9. — Comparer les trois limites suivantes :

$$\lim_{m\to+\infty}\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\right], \qquad \lim_{n\to+\infty}\left[\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\right] \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

---

[*] Cet exercice, dont le but est de vous faire utiliser la définition théorique de limite, peut être décliné de multiples façons en remplaçant la fonction exponentielle par la fonction carrée, ou racine cubique, ou logarithme népérien…

Suites adjacentes

Exercice 10. — On définit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

1) Montrer que $(u_n)_n$ est décroissante, et que $(v_n)_n$ est croissante.

2) Calculer $u_n - v_n$ pour tout entier naturel n. Conclure.

Exercice 11. — **(Irrationnalité de e)**

On pose pour tout entier naturel n : $\qquad u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad$ et $\qquad v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$

1) Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune, que nous noterons ℓ.

2) On admet dans cette question que $\ell = \mathrm{e}$. †

   a) Justifier brièvement que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n < \mathrm{e} < v_n$.

   b) Montrer que e est irrationnel.

Suites extraites

Exercice 12. — Etablir que la suite de terme général $\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$ n'a pas de limite.

Exercice 13. — Etablir que la suite de terme général $\cos(n)$ n'a pas de limite.

Exercice 14. — Etablir que la suite (complexe) de terme général i^n n'a pas de limite.

Suites arithmético-géométriques et récurrentes linéaires

Exercice 15. — Donner l'expression du terme général, et la limite de la suite récurrente réelle (u_n) donnée par : $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Exercice 16. — Donner l'expression du terme général, et la limite de la suite récurrente réelle (u_n) donnée par : $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$.

Exercice 17. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente réelle (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$$

Exercice 18. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente réelle (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$$

Exercice 19. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente réelle (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$$

†. Résultat déjà établi cette année, et donné en question de cours.

Exercice 20. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1 + 4i$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (3 - 2i)\, u_{n+1} - (5 - 5i)\, u_n$$

Croissances comparées

Exercice 21. — **(And the winner is...)** Soient r un réel, et $\alpha > 0$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{r^n}{n^\alpha}$

Exercice 22. — **(And the winner is... bis)** Soit r un réel. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{r^n}{n!}$

Exercice 23. — **(And the winner is... ter)** Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$

Suites récurrentes (“$u_{n+1} = f(u_n)$”)

Exercice 24. — Etudier la suite (en particulier, on déterminera l'éventuelle limite) u définie en posant :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}$$

Exercice 25. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \geqslant -2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

Exercice 26. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$.

Exercice 27. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

Exercice 28. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \geqslant 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$.

Exercices classiques d'écrit ou d'oral

Exercice 29. — Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que les suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent.

Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Exercice 30. — Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1,\ 0 \leqslant v_n \leqslant 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 1.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent et préciser leur limite.

Exercice 31. — Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!\right)}{n!} = 1$

Exercice 32. — Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 33. — $\boxed{\text{“Tout sur Wallis”}}$ On pose $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t$.

On rappelle (est-ce vraiment utile ?) que les intégrales I_n sont les intégrales de Wallis. L'objectif de cet exo de passer en revue les questions fréquentes relatives à cette famille d'intégrales.

1/ Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante, et à termes positifs.

2/ En déduire que la suite $(I_n)_n$ est convergente.

3/ A l'aide d'une intégration par parties, établir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, I_n$.

4/ Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

5/ Déduire des questions 1, 2 et 4 que : $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} I_n = 0$.

6/ Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n \geqslant \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t$. En déduire que la suite $(I_n)_n$ est à termes strictement positifs.

7/ Justifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$

8/ Justifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \dfrac{n+1}{n+2}$

9/ Déterminer : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$.

10/ Etablir que : $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt{n}\, I_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

11/ Soit p un entier naturel. Retrouver les formules donnant I_{2p} et I_{2p+1} en fonction de p.

12/ Etablir que : $\displaystyle\lim_{p \longrightarrow +\infty} \dfrac{(2p+1)\, I_{2p+1}}{2p\, I_{2p}} = 1$

13/ Déduire de ce qui précède : $\pi = \displaystyle\lim_{p \longrightarrow +\infty} \dfrac{2^{4p}\,(p!)^4}{p\,((2p)!)^2}$

Exercice 34. — Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites complexes (“de toute suite complexe bornée, on peut extraire une sous suite convergente”).

Exercice 35. — Déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}^{-1} \right)$.

Exercice 36. — Soit (u_n) une suite d'entiers naturels 2 à 2 distincts. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.