

COLLE 11 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N°1 — Relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** (ce que l'on note $(u_n) \sim (v_n)$) s'il existe une suite réelle (φ_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

Etablir que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Il suffit de vérifier les 3 axiomes caractérisant les relations d'équivalence : réflexivité, symétrie, transitivité.

► **Réflexivité.** Soit (u_n) une suite réelle. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 \times u_n$ ("la suite (φ_n) constante égale à 1 convient"). Donc : $(u_n) \sim (u_n)$.

Ainsi : $\forall (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \sim (u_n)$. La relation $\sim$ est donc réflexive.

► **Symétrie.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Supposons que : $(u_n) \sim (v_n)$. Alors il existe une suite réelle (φ_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

Puisque la suite (φ_n) a pour limite 1, ses termes sont non nuls à partir d'un certain rang. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\varphi_n} v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi_n} = 1$$

On en déduit que : $(v_n) \sim (u_n)$.

Ainsi : $\forall ((u_n), (v_n)) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2, ((u_n) \sim (v_n)) \implies ((v_n) \sim (u_n))$. La relation $\sim$ est donc symétrique.

► **Transitivité.** Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites réelles. Supposons que : $(u_n) \sim (v_n)$ et $(v_n) \sim (w_n)$. Alors il existe deux suites réelles (φ_n) et (ψ_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \psi_n v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n = 1$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = (\psi_n \varphi_n) u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\psi_n \varphi_n) = 1$$

En d'autres termes : $(u_n) \sim (w_n)$.

Ainsi : $\forall ((u_n), (v_n), (w_n)) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^3, ((u_n) \sim (v_n) \text{ et } (v_n) \sim (w_n)) \implies ((u_n) \sim (w_n))$. La relation $\sim$ est donc transitive.

Conclusion. La relation $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive. C'est donc une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

QUESTION DE COURS N°2 — Limite d'une somme : soient u et v deux suites, de limites respectives ℓ et ℓ' . Alors $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$.

Soient u et v deux suites, de limites respectives ℓ et ℓ' .

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme u a pour limite ℓ : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2})$ (♠)

Comme v a pour limite ℓ' : $\exists n_1 \in \mathbb{N}, (n \geq n_1 \implies |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2})$ (♣)

Posons $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Pour tout entier $n \geq n_2$, les deux inégalités ci-dessus sont satisfaites, et on a donc :

$$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \varepsilon \text{ (la première inégalité provenant de l'inégalité triangulaire).}$$

En résumé, on a établi que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, (n \geq n_2 \implies |u_n + v_n - (\ell + \ell')| < \varepsilon)$

Conclusion. Si u et v convergent vers ℓ et ℓ' respectivement, alors $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$

QUESTION DE COURS N°3 — **Propriété** : si u est bornée, et v converge vers 0, alors uv converge vers 0 **ET** application : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \operatorname{Arctan}(n) = 0$

Soient v une suite convergeant vers 0, et u une suite bornée.

Puisque u est bornée, il existe un réel strictement positif M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ ($\spadesuit$).

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme v a pour limite 0 : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies |v_n| < \frac{\varepsilon}{M})$ ($\clubsuit$)

On déduit de ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies |u_n v_n| < M \times \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon)$

En résumé, on a établi que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies |u_n v_n| < \varepsilon)$

Conclusion. Si u est bornée, et v tend vers 0, alors suite uv tend vers 0.

Application. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{-n} \operatorname{Arctan}(n)$. La suite de terme général $\operatorname{Arctan}(n)$ est bornée (entre 0 et $\frac{\pi}{2}$), et la suite de terme général e^{-n} tend vers 0. Selon la propriété précédente, on peut affirmer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \operatorname{Arctan}(n) = 0$.

QUESTION DE COURS N°4 — **Théorème (d'encadrement ou "des gendarmes")** : soient u, v et w trois suites réelles telles que :

- à partir d'un certain rang : $u \leq v \leq w$
- u et w sont convergentes et $\lim u = \lim w$

Alors v converge et $\lim v = \lim u = \lim w$.

ET application : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1-t)^{2n+1} \sin(t) dt = 0$.

Soient u et w deux suites convergentes, avec $\lim u = \lim w$. Notons : $\ell = \lim u = \lim w$

Soit $\varepsilon > 0$.

- Par hypothèse : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies u_n \leq v_n \leq w_n)$
- Comme u a pour limite ℓ : $\exists n_1 \in \mathbb{N}, (n \geq n_1 \implies \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon)$
- Comme w a pour limite ℓ : $\exists n_2 \in \mathbb{N}, (n \geq n_2 \implies \ell - \varepsilon < w_n < \ell + \varepsilon)$

Posons : $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$. Pour $n \geq n_3$, les 3 conditions précédentes sont réalisées, et on a donc :

$$\ell - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < \ell + \varepsilon \text{ d'où en particulier : } \ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon \text{ soit : } |v_n - \ell| < \varepsilon.$$

En résumé, on a prouvé que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_3 \in \mathbb{N}, (n \geq n_3 \implies |v_n - \ell| < \varepsilon)$.

Donc la suite v est convergente et a pour limite $\ell = \lim u = \lim w$.

➤ **Application.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1-t)^{2n+1} \sin(t) dt = 0$.

Posons, pour tout entier naturel n : $u_n = \int_0^1 (1-t)^{2n+1} \sin(t) dt$.

Pour tout réel $t \in [0, 1]$ on a : $0 \leq \sin(t) \leq 1$. D'où : $0 \leq (1-t)^{2n+1} \sin(t) \leq (1-t)^{2n+1}$.

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $0 \leq u_n \leq \int_0^1 (1-t)^{2n+1} dt$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+2}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+2} = 0$, on déduit de l'encadrement précédent et du théorème des gendarmes que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

QUESTION DE COURS N°5 — **Application du théorème de comparaison** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^n} = +\infty$.

Pour tout entier naturel non nul n , posons : $u_n = \frac{n!}{e^n}$. Observons que : $u_n = \frac{\prod_{k=1}^n k}{\prod_{k=1}^n e} = \prod_{k=1}^n \frac{k}{e}$.

Pour tout $n \geq 3$, on peut écrire (relation de Chasles pour les produits) : $u_n = \left(\prod_{k=1}^2 \frac{k}{e} \right) \times \left(\prod_{k=3}^n \frac{k}{e} \right) = \frac{2}{e^2} \times \left(\prod_{k=3}^n \frac{k}{e} \right)$

Or : $\prod_{k=3}^n \frac{k}{e} \geq \prod_{k=3}^n \frac{3}{e}$ d'où : $\prod_{k=3}^n \frac{k}{e} \geq \left(\frac{3}{e} \right)^n$. On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, u_n \geq \frac{2}{e^2} \times \left(\frac{3}{e} \right)^n$ (♠).

Par ailleurs, $\frac{2}{e^2} \times \left(\frac{3}{e} \right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{e} > 1$, d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^2} \times \left(\frac{3}{e} \right)^n = +\infty$ (♣).

Conclusion. D'après (♠), (♣) et le théorème de comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^n} = +\infty$.

QUESTION DE COURS N°6 — **CONGRUENCES**. Soit p un entier naturel ≥ 2 . On définit une relation binaire sur $\mathbb{N}$ appelée **relation de congruence modulo p** et notée $\equiv$ en posant

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \equiv m [p] \iff n - m \text{ est multiple de } p$$

1/ Montrer que la relation de congruence modulo p est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

2/ Montrer que pour tout quadruplet (a, b, c, d) d'entiers naturels on a :

$$(a \equiv c [p]) \wedge (b \equiv d [p]) \implies (a + b \equiv c + d [p]) \wedge (ab \equiv cd [p])$$

1/ ► **Réflexivité.** Soit n un entier. Alors : p divise $n - n$. Donc : $n \equiv n [p]$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{Z}, n \equiv n [p]$. La relation de congruence est donc réflexive.

► **Symétrie.** Soient n et m deux entiers. Supposons que : $n \equiv m [p]$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $n - m = kp$.

Donc : $m - n = (-k)p$. Donc : p divise $m - n$. Donc : $m \equiv n [p]$.

Ainsi : $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, (n \equiv m [p]) \implies (m \equiv n [p])$. La relation de congruence est donc symétrique.

► **Transitivité.** Soient n, m et q trois entiers. Supposons que : $n \equiv m [p]$ et $m \equiv q [p]$. Alors il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que : $n - m = kp$ et $m - q = k'p$.

Donc : $n - q = (k + k')p$. Donc : p divise $n - q$. Donc : $n \equiv q [p]$.

Ainsi : $\forall (n, m, q) \in \mathbb{Z}^3, (n \equiv m [p] \text{ et } m \equiv q [p]) \implies (n \equiv q [p])$. La relation de congruence est donc transitive.

Conclusion. La relation de congruence est réflexive, symétrique et transitive : c'est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

2/ Par hypothèse, il existe deux entiers k et k' tels que : $c = a + kp$ et $d = b + k'p$. On en déduit que : $c + d = a + b + (k + k')p$: donc $a + b \equiv c + d [p]$.

Par ailleurs : $cd = ab + (kb + k'a + kk'p)p$. Donc $ab \equiv cd [p]$.

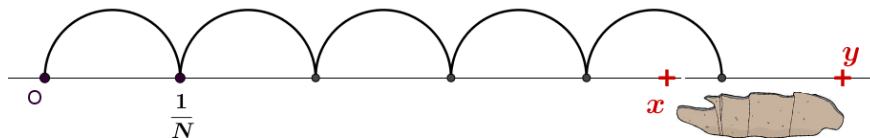
QUESTION DE COURS “SUPERSTAR” — Théorème : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Il s'agit de prouver qu'il existe un nombre rationnel entre deux réels distincts. Considérons deux réels x et y , tels que $x < y$.

► Si $x < 0$ et $y > 0$: alors 0 (qui est rationnel!) est compris entre x et y .

► Si $0 \leq x < y$: puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier naturel non nul N tel que : $N(y - x) > 1$ et il existe un entier naturel M tel que $M/N > x$.

Remarque : la figure ci-dessous illustre ces inégalités, dont on explique ici l'origine très informellement.



Entre x et y , il y a un trou, de longueur $y - x$. Pour être certain de tomber dans ce trou en partant de zéro, on doit s'assurer de deux conditions : ne pas faire des pas trop longs (sinon on pourrait passer au-dessus du trou), et en faire suffisamment.

Pour remplir la première, on choisit de faire des pas de longueur $1/N$ (qui est rationnel), de telle sorte que : $1/N < (y - x)$ (longueur d'un pas < longueur du trou). Ce qui équivaut à : $N(y - x) > 1$.

Pour remplir la seconde, on observe qu'il faut au moins dépasser x pour tomber dans le trou. Or, $\mathbb{R}$ étant archimédien, quitte à faire assez de pas de longueur $1/N$, on dépassera x . C'est-à-dire : il existe un entier M assez grand pour que $M \times (1/N) > x$.

Considérons l'ensemble : $E = \left\{ k \in \mathbb{N} / \frac{k}{N} \leq x \right\}$. Cet ensemble est non vide, puisque 0 y appartient. En outre, pour tout élément k de E , on a : $(k/N) \leq x < (M/N)$ d'où en particulier $k < M$. Donc E est majoré (par M).

En résumé : E est une partie de $\mathbb{N}$, non vide et majorée. A ce titre elle admet un plus grand élément, que nous noterons : N_0 . On a alors : $N_0 \in E$ et $N_0 + 1 \notin E$ (sinon N_0 ne serait pas le plus grand élément !). D'où : $\frac{N_0}{N} \leq x < \frac{N_0 + 1}{N}$ (♠).

Par ailleurs, puisque $N(y - x) > 1$, on a : $y > x + \frac{1}{N}$. On déduit de cette inégalité et de $\frac{N_0}{N} \leq x$ que : $\frac{N_0 + 1}{N} < y$ (♣).

On déduit de (♠) et de (♣) que : $x < \frac{N_0 + 1}{N} < y$, ce qui prouve l'existence d'un rationnel entre x et y .

► Si $x < y \leq 0$: posons $X = -x$ et $Y = -y$. D'après ce que nous venons d'établir plus haut, il existe un rationnel r tel que : $Y < r < X$. Donc $x < -r < y$, d'où la conclusion puisque l'opposé d'un rationnel est encore un rationnel.

Synthèse : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y, \exists r \in \mathbb{Q}, x < r < y$ ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)

Conséquences inratables, néanmoins de démonstrations non exigibles en colle :

COROLLAIRE 1. — Tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.

COROLLAIRE 2. — Tout nombre réel est limite d'une suite d'irrationnels.

COROLLAIRE 3. — $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.