Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}5 — 3 décembre 2022

Exercice 1 — (Equations différentielles linéaires)

1/ (EDL1). Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ solutions de l'équation différentielle (E) suivante :

$$x\,y' + y = \arctan(x)$$

L'intervalle de résolution est $\mathbb{R}_+^*$ (imposé par l'énoncé) ; sur celui-ci, les fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto 1$ et $x \longmapsto \arctan(x)$ sont continues (ce sont des fonctions usuelles), et la première ne s'annule pas.

➤ **Equation homogène associée**. Avec les notations du cours, on a pour tout réel $x > 0$:

$$a(x) = x\,;\quad b(x) = 1\,;\quad \text{d'où } \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{1}{x}\quad . \text{ On peut donc poser : } A(x) = \ln(x)$$

La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$ est : $\forall\,(x, K) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ f_K(x) = \dfrac{K}{x}$

➤ **Solution particulière de (E)**. On peut rechercher une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante.

On pose : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_P(x) = \dfrac{K(x)}{x}$, où K désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. L'hypothèse faite sur K implique que f_P est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'_P(x) = \frac{K'(x)x - K(x)}{x^2}$$

Par suite, f_P est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{K'(x)x^2 - xK(x)}{x^2} + \frac{K(x)}{x} = \arctan(x) \Longleftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ K'(x) = \arctan(x)$$

Or :

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x =_{IPP,cours} x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\arctan(x) + \ln\left(\left(1+x^2\right)^{-1/2}\right)$$

Une solution particulière de (E) est donc : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_P(x) = \arctan(x) + \dfrac{\ln\left(\left(1+x^2\right)^{-1/2}\right)}{x}$.

Conclusion. D'après ce qui précède, la solution générale de (E) est :

$$\forall\,(x, K) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ g_K(x) = \arctan(x) + \frac{\ln\left(\left(1+x^2\right)^{-1/2}\right)}{x} + \frac{K}{x}$$

2/ (EDL2). Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad y'' + 3y' - 4y = (x+1)\mathrm{e}^x$$

➤ Résolution de l'équation homogène associée (H) : $y'' + 3y' - 4y = 0$.

L'équation caractéristique associée est (EC) : $r^2 + 3r - 4 = 0$.

(EC) possède deux racines : 1 et -4. D'après le cours, la solution générale de (H) est donc :

$$f_H : x \in \mathbb{R} \longmapsto C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-4x} \ \ (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}) .$$

➤ Solution particulière de l'équation avec second membre.

Puisque le coefficient de l'exponentielle au second membre ($\alpha = 1$) est racine simple l'équation caractéristique, et que le second membre de l'EDL est le produit d'un polynôme de degré 1 et d'une exponentielle, on peut chercher une solution en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_P(x) = (ax^2 + bx)\mathrm{e}^x \quad (\text{avec } a \text{ et } b \text{ réels}).$$

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$$f_P{}'(x) = \left(ax^2 + (2a+b)x + b\right)\mathrm{e}^x \text{ puis : } f_P{}''(x) = \left(ax^2 + (4a+b)x + 2(a+b)\right)\mathrm{e}^x$$

Par suite, on a pour tout réel x :

$$f''_P(x) + 3f'_P(x) - 4f_P(x) = \mathrm{e}^x\left[ax^2 + (4a+b)x + 2(a+b) + 3ax^2 + (6a+3b)x + 3b - 4ax^2 - 4bx\right]$$

$$= \mathrm{e}^x\left[10ax + 2a + 5b\right]$$

On en déduit que f_P est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ (10ax + 2a + 5b)\,\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x \Longleftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R},\ 10ax + 2a + 5b = x + 1$$

D'où, par identification :

$$f_P \text{ est solution de } (E) \text{ si et seulement si } a = \frac{1}{10} \text{ et } b = \frac{4}{25}$$

Ainsi, la fonction $f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto \left(\dfrac{1}{10}x^2 + \dfrac{4}{25}x\right)\mathrm{e}^x$ est solution de (E).

➤ Conclusion — Solution générale de l'équation complète (E) : d'après ce qui précède, la solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{25}x + C_1\right)\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-4x} \ \ (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}$$

Exercice 2 — **(Etude de fonction)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f\,(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1/ Montrer que f est impaire.

L'ensemble de définition de f est symétrique par rapport à zéro, et f est le quotient d'une fonction impaire et d'une fonction paire.

Conclusion. La fonction f est impaire.

2/ Etablir que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on précisera.

Selon les théorèmes généraux, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}$$

En particulier, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Puisque la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$.

En outre, on a pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{1}{1\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} \qquad \text{D'où : } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

La fonction f étant impaire, on en déduit que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

Conclusion. La fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1\,[$.

3/ On considère à présent la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

Montrer que pour tout réel x on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \arctan(x)$$

D'après l'énoncé, on a : $g = \arcsin \circ f$. Puisque f est à valeurs dans $]-1,1\,[$,* cette composée est en effet définie sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}$ selon les théorèmes généraux.

*. Et que l'ensemble de définition de la fonction arcsinus est $[-1,1]$.

Pour tout réel x on a :

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} = \frac{\left(x^2+1\right)^{-3/2}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{x^2+1}}} = \frac{\left(x^2+1\right)^{-3/2}}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}}} = \frac{\left(x^2+1\right)^{-3/2}}{\left(x^2+1\right)^{-1/2}} = \left(x^2+1\right)^{-1} = \frac{1}{x^2+1}$$

Par suite : $\exists\, k \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \arctan(x) + k$. Puisque $g(0) = 0 = \arctan(0)$, on peut conclure :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \arctan(x)$$

Exercice 3 — **(Application)** On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (3x - 5y,\ x - 2y) \end{aligned}$$

Etablir que f est bijective, et déterminer l'expression de sa bijection réciproque f^{-1}.

Soit (X, Y) un élément arbitraire de $\mathbb{R}^2$. Résolvons l'équation $f(x, y) = (X, Y)$.

On a : $f(x, y) = (X, Y) \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x - 5y = X & (L_1) \\ x - 2y = Y & (L_2) \end{cases}$

Alors : $(L_1) - (3L_2) \Longleftrightarrow y = X - 3Y$. Et : $2(L_1) - 5(L_2) \Longleftrightarrow x = 2X - 5Y$.

En d'autres termes : $f(x, y) = (X, Y) \Longleftrightarrow (x, y) = (2X - 5Y, X - 3Y)$.

On a ainsi établi que tout élément (X, Y) de $\mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}^2$.

Conclusion. L'application f est bijective, et sa bijection réciproque est

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) & \longmapsto (2X - 5Y, X - 3Y) \end{aligned}$$

Problème 1 — Intégrales *Dans le cours de cette année, plusieurs "sommes infinies" ont été étudiées. Pour ne citer que deux exemples, nous avons établi que la somme des inverses des entiers*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$; tandis que la somme alternée des inverses des entiers

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

admet une limite finie (égale à $\ln(2)$) lorsque n tend vers $+\infty$.

L'objectif principal de ce problème est d'étudier une nouvelle somme :

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

et de prouver que cette somme tend vers une limite finie, que l'on détermine en fin de problème.

La réalisation de cet objectif passe par l'étude d'une suite d'intégrales (partie A), des calculs utilisant notamment la technique d'intégration par parties (partie B), et des calculs de sommes pour conclure (partie C).

Partie A — Une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$J_n = \int_0^1 (1-t)^{2n+1} \sin(t)\,\mathrm{d}t$$

1/ Calculer J_0.

On a $J_0 = \displaystyle\int_0^1 (1-t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$. D'après la formule d'intégration par parties, on a :

$$J_0 = \left[-(1-t)\cos(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \cos(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \left[\sin(t)\right]_0^1$$

Conclusion. $J_0 = 1 - \sin(1)$

2/ Montrer que la suite (J_n) est décroissante, et positive.

Soit n un entier naturel.

On a $J_n \geqslant 0$ car la fonction $t \longmapsto (1-t)^{2n+1}\sin(t)$ est positive sur $[0,1]$, et par positivité de l'intégrale.

En outre, par linéarité de l'intégrale, on a :

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^1 (1-t)^{2n+3}\sin(t) - (1-t)^{2n+1}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^{2n+1}\sin(t)(t^2-1)\,\mathrm{d}t$$

Or pour tout réel t dans $[0,1]$, on a : $(1-t)^{2n+1}\sin(t)(t^2-1) \leqslant 0$.

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que : $J_{n+1} - J_n \leqslant 0$.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ J_{n+1} - J_n \leqslant 0 \quad \text{et} \quad J_n \geqslant 0$. La suite (J_n) est décroissante et positive.

3/ Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{2n+2}$$

En déduire la limite de J_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit n un entier naturel.

Pour tout réel t entre 0 et 1 on a : $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$.

D'où :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad 0 \leqslant (1-t)^{2n+1}\sin(t) \leqslant (1-t)^{2n+1}$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 (1-t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t \quad \text{d'où : } 0 \leqslant J_n \leqslant \left[-\frac{(1-t)^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1$$

Ainsi : $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{2n+2}$

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{2n+2}$

Partie B — Relation de récurrence entre J_n et J_{n+1}

Dans cette partie, n désigne un entier naturel fixé.

5/ A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$J_n = \frac{1}{2n+2}\int_0^1 (1-t)^{2n+2}\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

Soit n un entier naturel. On a : $J_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{2n+1}\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

Selon la formule d'intégration par parties, on a :

$$J_n = \left[-\frac{(1-t)^{2n+2}}{2n+2} \sin(t) \right]_0^1 + \frac{1}{2n+2} \int_0^1 (1-t)^{2n+2} \cos(t)\, \mathrm{d}t$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \dfrac{1}{2n+2} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{2n+2} \cos(t)\, \mathrm{d}t$

6/ A l'aide d'une seconde intégration par parties, établir que :

$$J_n = \frac{1}{(2n+2)\,(2n+3)} \left(1 - J_{n+1}\right)$$

Soit n un entier naturel. Selon la question précédente, on a : $J_n = \dfrac{1}{2n+2} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{2n+2} \cos(t)\, \mathrm{d}t$.

Notons $K_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{2n+2} \cos(t)\, \mathrm{d}t$, de telle sorte que : $J_n = \dfrac{1}{2n+2} K_n \qquad (\spadesuit)$.

Selon la formule d'intégration par parties, on a :

$$K_n = \left[-\frac{(1-t)^{2n+3}}{2n+3} \cos(t) \right]_0^1 - \frac{1}{2n+3} \int_0^1 (1-t)^{2n+3} \sin(t)\, \mathrm{d}t$$

D'où :

$$K_n = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+3} \int_0^1 (1-t)^{2n+3} \sin(t)\, \mathrm{d}t$$

On en déduit, avec $(\spadesuit)$, que :

$$J_n = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \left(1 - \underbrace{\int_0^1 (1-t)^{2n+3} \sin(t)\, \mathrm{d}t}_{=J_{n+1}} \right)$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \dfrac{1}{(2n+2)\,(2n+3)} \left(1 - J_{n+1}\right)$

Partie C — Application : calcul d'une limite

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{2n+1} \sin(t)\, \mathrm{d}t$$

7/ A l'aide des résultats de la partie B, montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} - I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}$$

Soit n un entier naturel. Par définition de I_n, on a : $I_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, J_n$.

D'après la question précédente, on en déduit que :

$$I_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(2n+2)\,(2n+3)}\,(1 - J_{n+1})$$

$$\iff I_n = \frac{(-1)^n}{(2n+3)!} - \frac{(-1)^n}{(2n+3)!} J_{n+1}$$

$$\iff I_n = \frac{(-1)^n}{(2n+3)!} + \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} J_{n+1}}_{=I_{n+1}}$$

$$\iff I_n = \frac{(-1)^n}{(2n+3)!} + I_{n+1}$$

$$\iff I_n - I_{n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+3)!}$$

$$\iff I_{n+1} - I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}$$

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} - I_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}$

8/ Pour tout entier naturel non nul N, on note : $\qquad S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$.

a/ Etablir que :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \qquad S_N = \sin(1) + I_N$$

Soit N un entier naturel non nul. On a :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

$$\iff S_N = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

$$\iff S_N = 1 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}$$

$\Longleftrightarrow S_N = 1 + \sum_{n=0}^{N-1} (I_{n+1} - I_n)$ *(somme télescopique)*

$\Longleftrightarrow S_N = 1 + I_N - I_0$

$\Longleftrightarrow S_N = 1 + I_N - 1 + \sin(1)$ *(d'après la question 1)*

$\Longleftrightarrow S_N = \sin(1) + I_N$

Conclusion. $\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad S_N = \sin(1) + I_N$

b/ En déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right)$$

Il résulte de la question 3 que : $\lim_{N\to+\infty} I_N = 0$.

On en déduit grâce à la question précédente que : $\lim_{N\to+\infty} S_N = \sin(1)$.

Conclusion. $\lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right) = \sin(1)$.

Informellement :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right) = \sin(1)$$

Problème BLANC — (Résolution d'une équation différentielle d'ordre 3)

L'objectif de ce problème est la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 3 $(y''' - y = 0)$*. Cette résolution se fait essentiellement dans la* ***partie B****. Pour y parvenir, on introduit dans la* ***partie A*** *des fonctions dont les dérivées possèdent des propriétés particulières, qui seront utilisées dans la seconde partie.*

Partie A — Calculs de dérivées

On considère les trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes :

$$g_1 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^x \,; \qquad g_2 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad g_3 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$

1/ Calculer ${g_2}'$. Vérifier qu'il existe deux réels a et b (que l'on précisera) tels que ${g_2}' = ag_2 + bg_3$.

La fonction g_2 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux sur la dérivabilité) et : ${g_2}' = -\dfrac{1}{2}\, g_2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, g_3$

2/ Calculer ${g_3}'$. Vérifier qu'il existe deux réels c et d (que l'on précisera) tels que ${g_3}' = cg_2 + dg_3$.

La fonction g_3 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux sur la dérivabilité) et : ${g_3}' = -\dfrac{1}{2}\, g_3 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, g_2$

3/ A l'aide des questions précédentes, exprimer ${g_2}^{(3)}$ et ${g_3}^{(3)}$ en fonction de g_2 et g_3.

On dérive la relation de la question 1 pour obtenir la dérivée seconde de g_2 :

$${g_2}'' = -\frac{1}{2}\, {g_2}' + \frac{\sqrt{3}}{2}\, {g_3}' \iff {g_2}'' = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\, g_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\, g_3\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\, g_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\, g_2\right)$$

$$\iff {g_2}'' = -\frac{1}{2}\, g_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\, g_3$$

Et on redérive :

$${g_2}''' = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\, g_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\, g_3\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\, g_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\, g_2\right) \iff {g_2}''' = g_2$$

Calculs analogues pour établir que ${g_3}''' = g_3$.

Partie B — Une équation différentielle d'ordre 3

Dans cette partie, on note (E_1) l'équation différentielle :

$$(E_1) \qquad y''' = y$$

où y''' désigne la dérivée troisième de y (que l'on peut aussi noter $y^{(3)}$, comme dans la partie A).

On note $\mathbf{S}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles solutions de (E_1).

Dans cette partie, lorsque l'on demande de "résoudre l'équation différentielle", on entend "déterminer les solutions ***à valeurs réelles*** *de l'équation différentielle".*

4/ Montrer que les fonctions g_1, g_2 et g_3 définies au début de la partie A sont solutions de (E_1).

D'après le cours et la question 3, on a : $\forall\, i \in [\![1, 3]\!],\ {g_i}''' = g_i$

Conclusion. Les fonctions g_1, g_2 et g_3 sont solutions de (E_1).

5/ On pose $\mathbf{F} = \{ag_1 + bg_2 + cg_3 \,/\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$. † Etablir que $\mathbf{F} \subset \mathbf{S}$.

Soit $f \in \mathbf{F}$. Il existe trois réels a, b et c tels que : $f = ag_1 + bg_2 + cg_3$. On a alors (essentiellement par linéarité de la dérivation) :

$f''' = (ag_1 + bg_2 + cg_3)''' = a{g_1}''' + b{g_2}''' + c{g_3}''' = ag_1 + bg_2 + cg_3 = f$. Il s'ensuit que $f \in \mathbf{S}$.

En résumé : $[f \in \mathbf{F}] \Longrightarrow [f \in \mathbf{S}]$.

Conclusion. $\mathbf{F} \subset \mathbf{S}$.

6/ Le but des questions suivantes est de montrer l'inclusion $\mathbf{S} \subset \mathbf{F}$.

a/ Soit f un élément de $\mathbf{S}$. On pose : $g = f'' + f' + f$. Montrer que g est solution de l'équation différentielle

$$(E_2) \qquad y' - y = 0$$

Avec les hypothèses de l'énoncé : $g' = f''' + f'' + f'$ et comme f est solution de (E_1), on a $f''' = f$, d'où : $g' = f'' + f' + f$, soit : $g' = g$.

Conclusion. g est solution de l'équation (E_2) : $y' - y = 0$

b/ Donner la solution générale de l'équation différentielle (E_2) (*il n'est pas indispensable de détailler cette question*).

Selon le cours, la solution générale sur $\mathbb{R}$ de (E_2) est $f_\lambda : x \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^x \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

†. En d'autres termes, l'ensemble $\mathbf{F}$ est l'ensemble de ce que l'on appelle les *combinaisons linéaires de g_1, g_2 et g_3*, càd des fonctions f s'écrivant sous la forme $f = ag_1 + bg_2 + cg_3$ avec a, b et c réels.

c/ Résoudre l'équation différentielle : $(E_3) \qquad y'' + y' + y = 0$.

L'équation caractéristique associée à l'équation (E_3) est : $r^2 + r + 1 = 0$. Cette équation possède deux solutions complexes conjuguées : $\dfrac{-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.‡

Conclusion. Selon le cours, la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ est donc :

$$f_{\lambda,\mu} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-x/2}\left(\lambda \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \lambda g_3(x) + \mu g_2(x) \qquad (\lambda, \mu \text{ réels}) .$$

d/ Soit λ un nombre réel. Résoudre l'équation différentielle : $(E_4) \qquad y'' + y' + y = \lambda \mathrm{e}^x$.

On peut observer que $\dfrac{\lambda}{3}\, g_1$ est une solution particulière de (E_4) pour obtenir directement que la solution générale de $y'' + y' + y = \lambda \mathrm{e}^x$ est :

$$f_{\alpha,\mu} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{\lambda}{3}\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x/2}\left(\alpha \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{\lambda}{3}\, g_1(x) + \alpha g_3(x) + \mu g_2(x)$$

(avec α, μ réels)

e/ En déduire que $\mathbf{S} \subset \mathbf{F}$. Conclure.

D'après les questions précédentes, si f est solution de (E_1), alors il existe trois réels (λ, α, μ) tels que : $f = \dfrac{\lambda}{3}\, g_1 + \alpha g_3 + \mu g_2$. Donc : $f \in \mathbf{F}$. On vient donc de prouver l'inclusion : $\mathbf{S} \subset \mathbf{F}$.

On déduit de cette inclusion (et de celle établie dans la question 5) que : $\mathbf{F} = \mathbf{S}$.

Conclusion. La solution générale de l'équation différentielle $y''' = y$ est :

$$f_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 \qquad (\alpha_1, \alpha_2 \text{ et } \alpha_3 \text{ réels})$$

‡. Vous avez évidemment reconnu $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$ et $j^2 = \mathrm{e}^{-2i\pi/3}$.

Problème ORANGE

L'objet de ce problème est de montrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

admet une limite finie en $+\infty$ et de calculer cette limite.

Partie A — Questions préliminaires

1/ a/ Montrer que φ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par construction, φ est de dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x on a : $\varphi'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} > 0$.

Conclusion. φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b/ Etudier la parité ou l'imparité éventuelle de la fonction φ.

$\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro, et pour tout réel x on a :

$$\varphi(-x) = \int_0^{-x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t =_{(ch.\,var:\,u=-t)} -\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = -\varphi(x)$$

Conclusion. φ est impaire

c/ Etudier le signe de φ sur $\mathbb{R}$.

On a $\varphi(0) = 0$, et φ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. On en déduit que φ est positive (*resp.* négative) sur $\mathbb{R}_+$ (*resp.* sur $\mathbb{R}_-$).

2/ a/ Montrer que pour tout réel t, on a $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{1/4}\mathrm{e}^{-t}$ puis en déduire que pour tout réel $x \geqslant 0$, $\varphi(x) \leqslant \mathrm{e}^{1/4}$.

Pour tout réel t, on a : $\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$. D'où : $-t^2 \leqslant -t + \dfrac{1}{4}$.

La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{1/4}\mathrm{e}^{-t}$$

Soit x un réel positif. On a : $\qquad 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^{1/4}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

D'où :

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant -\mathrm{e}^{1/4}\left[\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x \qquad \text{donc : } 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \mathrm{e}^{1/4}\underbrace{\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)}_{\leqslant 1 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) \leqslant \mathrm{e}^{1/4}$

b/ Montrer que $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$ existe et est finie.

La fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}$ (question 1-a), et est majorée (question précédente) : elle admet donc une limite finie en $+\infty$.

3/ a/ Montrer que pour tout $u \in \left]-\infty, 1\right[$,

$$1 + u \leqslant \mathrm{e}^u \leqslant \frac{1}{1-u}.$$

La fonction exponentielle étant convexe, l'inégalité de gauche est immédiate (pour tout réel u). Celle de droite s'obtient en appliquant à $(-u)$ l'inégalité de gauche...

Conclusion. $\forall\, u \in \left]-\infty, 1\right[, \qquad 1 + u \leqslant \mathrm{e}^u \leqslant \dfrac{1}{1-u}$

b/ En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in [0, \sqrt{n}]$,

$$\left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-u^2} \leqslant \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-n}.$$

On applique l'encadrement précédent à $-u^2/n$, puis on élève les termes de l'encadrement obtenu à la puissance n.

Partie B — Etude d'une suite d'intégrales célèbre

On définit les suites $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et $(J_n)_{n\geqslant 0}$ de la manière suivante : pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t.$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$; que $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et que $I_1 = 1$.

On admet également que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et est à valeurs positives.

On admet également que pour tout entier $n \geqslant 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

4/ Etablir que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

Cf cours.

5/ Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,I_n^2 = \dfrac{\pi}{2}$ En déduire la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,I_n$.

La suite (I_n) étant décroissante, on a pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

$$I_{n-1} \leqslant I_n \leqslant I_{n+1} \qquad \text{d'où :} \quad nI_nI_{n-1} \leqslant nI_n^2 \leqslant nI_{n+1}I_n$$

D'après les deux questions précédentes, on en déduit que :

$$\frac{\pi}{2} \leqslant nI_n^2 \leqslant (n+1)\,I_{n+1}I_n \times \frac{n}{n+1}$$

d'où :

$$\frac{\pi}{2} \leqslant nI_n^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \times \frac{n}{n+1}$$

Conclusion. Par théorème d'encadrement, on en déduit que : $\lim_{n\to+\infty} n\,I_n^2 = \dfrac{\pi}{2}$

La suite (nI_n) étant positive, on en déduit que : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,I_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

➤ Partie C - Calcul de la limite

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$K_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n \mathrm{d}u \quad \text{et} \quad L_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}u.$$

6/ A l'aide du résultat de la question 3b, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_n \leqslant \varphi(\sqrt{n}) \leqslant L_n$.

Conséquence de la définition de φ, de l'encadrement obtenu en 3-b, et de la croissance de l'intégrale.
Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ K_n \leqslant \varphi(\sqrt{n}) \leqslant L_n$

7/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a/ Montrer que $K_n = \sqrt{n}\,I_{2n+1}$

(on pourra procéder au changement de variable $u = \sqrt{n}\ \sin(t)$).

On a : $K_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n \mathrm{d}u =_{(ch.\,va:\,u=\sqrt{n}\ \sin(t))} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{n\sin^2(t)}{n}\right)^n \sqrt{n}\cos(t)\,\mathrm{d}t.$

Il s'ensuit que :

$$K_n = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \left(\cos^2(t)\right)^n \cos(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^1 I_{2n+1}$$

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ K_n = \sqrt{n}\,I_{2n+1}$

b/ Montrer que $L_n \leqslant \sqrt{n}\, I_{2n-2}$

(on pourra procéder au changement de variable $u = \sqrt{n}\ \tan(t)$).

On a : $L_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}u =_{(ch.\, va:\, u=\sqrt{n}\ \tan(t))} \int_0^{\pi/4} \left(1 + \tan^2(t)\right)^{-n} \sqrt{n}\cos^{-2}(t)\,\mathrm{d}t.$

Il s'ensuit que :

$$L_n = \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} \left(\cos^{-2}(t)\right)^{-n} \cos^{-2}(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où :

$$L_n = \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\, \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(t)\,\mathrm{d}t}_{=I_{2n-2}}$$

la majoration provenant de la relation de Chasles et de la positivité de l'intégrale.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ L_n \leqslant \sqrt{n}\, I_{2n-2}$

8/ Déduire de ce qui précède la limite de la suite $(\varphi(\sqrt{n}))_{n\geqslant 1}$.

Soit n un entier naturel. On déduit des questions 6 et 7 que :

$$\sqrt{n}\, I_{2n+1} \leqslant \varphi(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n}\, I_{2n-2}$$

D'où :

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\sqrt{2n+1}\, I_{2n+1} \leqslant \varphi(\sqrt{n}) \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n-2}}\sqrt{2n-2}\, I_{2n-2}$$

Or :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (trivial)

et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1}\, I_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n-2}\, I_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$ (question 5).

Conclusion. Par théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

9/ Conclure quant à la limite en $+\infty$ de φ.

D'après ce qui précède, φ étant monotone et continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Conclusion. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$