

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N^o5 — 3 DÉCEMBRE 2022*Durée : 4 heures — Calculatrices interdites*

Ce sujet est constitué :

- d'une partie commune : exercices 1 à 3, et problème 1.
- de deux problèmes : vous traiterez au choix le problème “blanc” ou le problème “orange”.

EXERCICE 1 — (EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES)

1/ (EDL1). Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle (E) suivante :

$$x y' + y = \arctan(x)$$

2/ (EDL2). Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'' + 3y' - 4y = (x + 1)e^x$$

EXERCICE 2 — (ETUDE DE FONCTION)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- 1/ Montrer que f est impaire.
- 2/ Etablir que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on précisera.
- 3/ On considère à présent la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

Montrer que pour tout réel x on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \arctan(x)$$

EXERCICE 3 — (APPLICATION) On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (3x - 5y, x - 2y) \end{aligned}$$

Etablir que f est bijective, et déterminer l'expression de sa bijection réciproque f^{-1} .

PROBLÈME 1 — **INTÉGRALES** Dans le cours de cette année, plusieurs “sommes infinies” ont été étudiées. Pour ne citer que deux exemples, nous avons établi que la somme des inverses des entiers

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$; tandis que la somme alternée des inverses des entiers

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

admet une limite finie (égale à $\ln(2)$) lorsque n tend vers $+\infty$.

L'objectif principal de ce problème est d'étudier une nouvelle somme :

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

et de prouver que cette somme tend vers une limite finie, que l'on détermine en fin de problème.

La réalisation de cette objectif passe par l'étude d'une certaine suite d'intégrales (partie A), des calculs utilisant notamment la technique d'intégration par parties (partie B), et des calculs de sommes pour conclure (partie C).

PARTIE A — UNE SUITE D'INTÉGRALES

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$J_n = \int_0^1 (1-t)^{2n+1} \sin(t) \, dt$$

1/ Calculer J_0 .

2/ Montrer que la suite (J_n) est décroissante, et positive.

3/ Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{2n+2}$$

En déduire la limite de J_n lorsque n tend vers $+\infty$.

PARTIE B — RELATION DE RÉCURRENCE ENTRE J_n ET J_{n+1}

Dans cette partie, n désigne un entier naturel fixé.

5/ A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$J_n = \frac{1}{2n+2} \int_0^1 (1-t)^{2n+2} \cos(t) dt$$

6/ A l'aide d'une seconde intégration par parties, établir que :

$$J_n = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} (1 - J_{n+1})$$

PARTIE C — APPLICATION : CALCUL D'UNE LIMITE

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{2n+1} \sin(t) dt$$

7/ A l'aide des résultats de la partie B, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} - I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}$$

8/ Pour tout entier naturel non nul N , on note :

$$S_N = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

a/ Etablir que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad S_N = \sin(1) + I_N$$

b/ En déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right)$$

PROBLÈME BLANC — (RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE D'ORDRE 3)

L'objectif de ce problème est la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 3 ($y''' - y = 0$). Cette résolution se fait essentiellement dans la **partie B**. Pour y parvenir, on introduit dans la **partie A** des fonctions dont les dérivées possèdent des propriétés particulières, qui seront utilisées dans la seconde partie.

PARTIE A — CALCULS DE DÉRIVÉES

On considère les trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes :

$$g_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x ; \quad g_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad g_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$

- 1/ Calculer g_2' . Vérifier qu'il existe deux réels a et b (que l'on précisera) tels que $g_2' = ag_2 + bg_3$.
- 2/ Calculer g_3' . Vérifier qu'il existe deux réels c et d (que l'on précisera) tels que $g_3' = cg_2 + dg_3$.
- 3/ A l'aide des questions précédentes, exprimer $g_2^{(3)}$ et $g_3^{(3)}$ en fonction de g_2 et g_3 .

PARTIE B — UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE D'ORDRE 3

Dans cette partie, on note (E_1) l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad y''' = y$$

où y''' désigne la dérivée troisième de y (que l'on peut aussi noter $y^{(3)}$, comme dans la partie A).

On note $\mathbf{S}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles solutions de (E_1) .

Dans cette partie, lorsque l'on demande de "résoudre l'équation différentielle", on entend "déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle".

- 4/ Montrer que les fonctions g_1 , g_2 et g_3 définies au début de la partie B sont solutions de (E_1) .
- 5/ On pose $\mathbf{F} = \{ag_1 + bg_2 + cg_3 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$. * Etablir que $\mathbf{F} \subset \mathbf{S}$.
- 6/ Le but des questions suivantes est de montrer l'inclusion $\mathbf{S} \subset \mathbf{F}$.

- a/ Soit f un élément de $\mathbf{S}$. On pose : $g = f'' + f' + f$. Montrer que g est solution de l'équation différentielle

$$(E_2) \quad y' - y = 0$$

- b/ Donner la solution générale de l'équation différentielle (E_2) (il n'est pas indispensable de détailler cette question).
- c/ Résoudre l'équation différentielle : $(E_3) \quad y'' + y' + y = 0$.
- d/ Soit λ un nombre réel. Résoudre l'équation différentielle : $(E_4) \quad y'' + y' + y = \lambda e^x$.
- e/ En déduire que $\mathbf{S} \subset \mathbf{F}$. Conclure.

*. En d'autres termes, l'ensemble $\mathbf{F}$ est l'ensemble de ce que l'on appelle les *combinaisons linéaires* de g_1 , g_2 et g_3 , càd des fonctions f s'écrivant sous la forme $f = ag_1 + bg_2 + cg_3$ avec a , b et c réels.

PROBLÈME ORANGE

L'objet de ce problème est de montrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

admet une limite finie en $+\infty$ et de calculer cette limite.

PARTIE A — QUESTIONS PRÉLIMINAIRES

1/ a/ Montrer que φ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b/ Etudier la parité ou l'imparité éventuelle de la fonction φ .

c/ Etudier le signe de φ sur $\mathbb{R}$.

2/ a/ Montrer que pour tout réel t , on a $e^{-t^2} \leq e^{1/4} e^{-t}$ puis en déduire que pour tout réel $x \geq 0$, $\varphi(x) \leq e^{1/4}$.

b/ Montrer que $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ existe et est finie.

3/ a/ Montrer que pour tout $u \in]-\infty, 1[$,

$$1 + u \leq e^u \leq \frac{1}{1 - u}.$$

b/ En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in [0, \sqrt{n}]$,

$$\left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n \leq e^{-u^2} \leq \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-n}.$$

PARTIE B — ETUDE D'UNE SUITE D'INTÉGRALES CÉLÈBRE

On définit les suites $(I_n)_{n \geq 0}$ et $(J_n)_{n \geq 0}$ de la manière suivante : pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt.$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$; que $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et que $I_1 = 1$.

On admet également que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et est à valeurs positives.

On admet également que pour tout entier $n \geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

4/ Etablir que pour tout entier $n \geq 1$,

$$nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

5/ Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}$ En déduire la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} I_n$.

► **PARTIE C - Calcul de la limite**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$K_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n du \quad \text{et} \quad L_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-n} du.$$

6/ A l'aide du résultat de la question 3b, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_n \leq \varphi(\sqrt{n}) \leq L_n$.

7/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a/ Montrer que $K_n = \sqrt{n} I_{2n+1}$

(on pourra procéder au changement de variable $u = \sqrt{n} \sin(t)$).

b/ Montrer que $L_n \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$

(on pourra procéder au changement de variable $u = \sqrt{n} \tan(t)$).

8/ Déduire de ce qui précède la limite de la suite $(\varphi(\sqrt{n}))_{n \geq 1}$.

9/ Conclure quant à la limite en $+\infty$ de φ .

Barème indicatif :

- Exercice 1 : 8pts
- Exercice 2 : 6pts
- Exercice 3 : 4pts
- Problème 1 : 13pts
- Problème BLANC : 13pts
- Problème ORANGE : 19pts